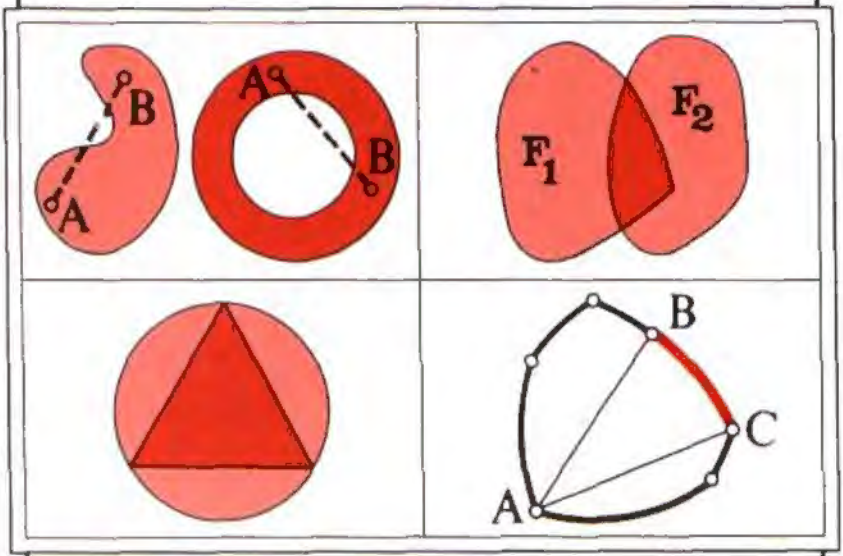
Lecciones populares de matemáticas

DIVISIÓN DE FIGURAS EN PARTES MENORES

V.G. Boltianski
I.Ts. Gojberg



LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

V.G. BOLTIANSKI
I.TS. GOJBERG

DIVISIÓN DE FIGURAS EN PARTES MENORES

Revisado en España por el Dr. Jose V. García Sestafe

© Traducido al español por Antonio Ballesteros Elías, 1994

® RUBIÑOS · 1860, S.A.
Alcalá, 98 MADRID
I.S.B.N.: 84-8041-047-7
Depósito Legal: AV-139-1994.
Imprime: MIJÁN, Artes Gráficas. ÁVILA.

PRÓLOGO

El presente libro está dedicado a los problemas relacionados entre sí de una nueva rama de las matemáticas, la llamada *geometría combinatoria* que en la actualidad se desarrolla impetuosamente. Los problemas que aquí se consideran están unidos por la idea general de la división de figuras en varias partes menores. ¿Qué se entiende por una "parte menor"? Esto puede ser comprendido de diferentes formas y es la causa de la aparición de los diferentes problemas que se analizan en el presente libro. Todos los teoremas que aquí se demuestran son recientes en extremo; el más antiguo fue hallado por el matemático polaco Borsuk hace unos 40 años. Este teorema es el principio alrededor del cual se desarrolla la posterior exposición. El teorema más reciente acaba de cumplir un año.

Los problemas que se estudian en el presente libro están al alcance de los alumnos de los grados superiores. Al mismo tiempo, el libro aproxima al lector a una serie de problemas geométricos aún no resueltos.

A este círculo de problemas, se dedica el libro de los mismos autores "Teoremas y problemas de geometría combinatoria" ("Ciencia", 1965). Sin embargo, en él se prestó mayor atención a los problemas que se crean en el espacio tridimensional o en los de mayor número de dimensiones. Por el contrario, el presente libro trata exclusivamente los problemas de la geometría en el plano. Gracias a esto, el libro puede ser empleado en los círculos de matemáticas de las escuelas. El libro "Teoremas y problemas de geometría combinatoria", que mencionamos anteriormente, será útil como libro de lectura para aquellos lectores que estén interesados por los problemas que en él mismo se exponen.

Las notas [1], [2], etc., que se dan al final del libro, están calculadas para lectores con una preparación más elevada.

Los autores

CONTENIDO

Prólogo 6

Capítulo I. División de figuras en partes de diámetros menores

§ 1. Diámetro de la figura 9
§ 2. Planteamiento del problema 11
§ 3. Teorema de Borsuk 13
§ 4. Figuras convexas 18
§ 5. Figuras de ancho constante 25
§ 6. Introducción de una figura en otras de ancho constante 28
§ 7. ¿Para qué figuras $a(F)=3$? 34

Capítulo II. División de figuras en el plano de Minkowski

§ 8. Ejemplo evidente 45
§ 9. Plano de Minkowski 48
§ 10. El problema de Borsuk en el plano de Minkowski 55

Capítulo III. Recubrimiento de las figuras convexas por homotécicas

§ 11. Planteamiento del problema 63
§ 12. Otra forma del problema 65
§ 13. Solución del problema del recubrimiento de figuras 67
§ 14. Demostración del teorema 4 80

Capítulo IV. Problema de iluminación

§ 15. Planteamiento del problema 83
§ 16. Solución del problema de iluminación 85
§ 17. Equivalencia de dos problemas 88
§ 18. División e iluminación de figuras convexas no acotadas 94

Notas 99

CAPÍTULO I

DIVISIÓN DE FIGURAS EN PARTES DE DIÁMETROS MENORES

§ 1.
DIÁMETRO DE LA FIGURA

Consideremos un círculo de diámetro d. La distancia entre cualesquiera de sus dos puntos M y N (fig. 1) no será mayor que d. Sin embargo, en el círculo pueden hallarse dos puntos A y B alejados el uno del otro a una distancia exactamente igual a d.

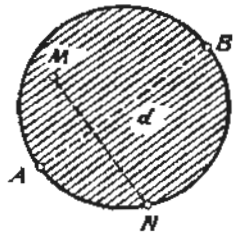


FIG. 1

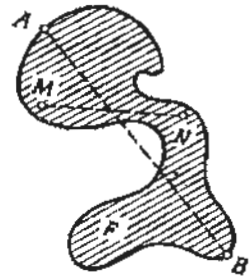


FIG. 2

A continuación, en lugar de un círculo analicemos cualquier otra figura. ¿A qué podremos llamar "diámetro" de dicha figura? Lo señalado anteriormente, nos hace sugerir que podemos llamar diámetro de la figura a la *mayor* de las distancias entre sus puntos. En otras palabras, *llamaremos diámetro de la figura F* (fig. 2) *a una distancia d tal que, primeramente, entre cualesquiera de dos puntos M y N de la figura F la distancia no sea mayor que d y que además, sea posible hallar en dicha figura, por lo menos, dos puntos A y B, entre los que la distancia sea exactamente igual a d*[1].

Por ejemplo, sea la figura F un semicírculo (fig. 3). Designemos por A y B los extremos de la semicircunferencia que lo limita. En tal caso, es evidente que el diámetro de

FIG. 3

la figura F será la longitud del segmento AB. Generalmente, si la figura F es el segmento de un círculo limitado por el arco l y la cuerda a, entonces, si el arco l es menor que la semicircunferencia (fig. 4, *a*), el diámetro de la figura F

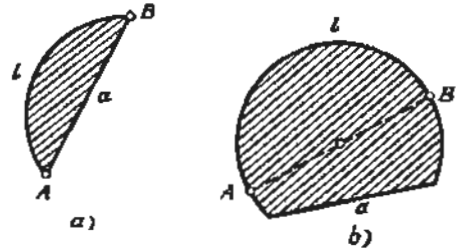


FIG. 4

será igual a a (o sea, a la longitud de la cuerda); cuando el arco l es mayor que la semicircunferencia (fig. 4, *b*), el diámetro de la figura F coincide con el del círculo.

Es fácil comprender que si F es un polígono (fig. 5),

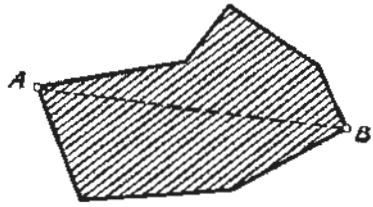


FIG. 5

su diámetro será igual a la distancia mayor entre sus vértices (²). Particularmente, el diámetro de todo triángulo (fig. 6) es igual a la longitud de su lado mayor.

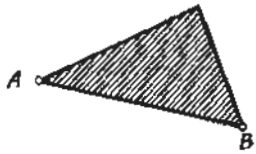


FIG. 6

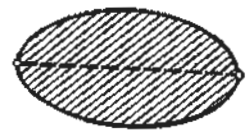


FIG. 7

Señalemos aquí, que si el diámetro de la figura F es igual a d, dicha figura puede tener múltiples pares de puntos entre los cuales la distancia será igual a d. Por ejemplo, en la elipse (fig. 7) hallaremos sólo un par de semejantes

FIG. 8

FIG. 9

puntos, en el cuadrado (fig. 8) dos, en el triángulo regular (fig. 9) tres y en fin, en el círculo hay un número infinito de pares de tales puntos.

§ 2.
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Es fácil comprender, que si un círculo de diámetro d se corta por cierta línea MN en dos partes, por lo menos una de éstas tendrá el diámetro d. En efecto, si M' es un punto diametralmente opuesto al punto M, éste deberá

pertenecer a una de las dos partes y esta parte (en la que se encuentran los puntos M, M') tendrá un diámetro d (fig. 10, *a*, *b*) (3). También está claro, que un círculo se puede

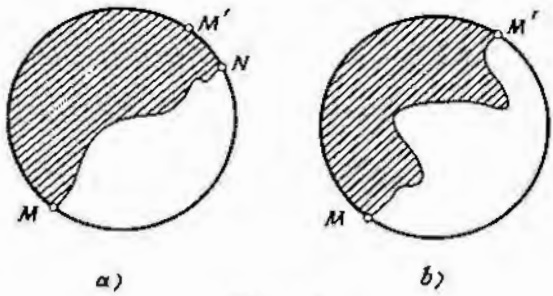


FIG. 10

dividir en tres partes y cada una de estas tendrá un diámetro menor que d (fig. 11, *a*, *b*).

En virtud de lo dicho, un círculo de diámetro d no puede ser dividido en dos partes, de tal forma que el diámetro de

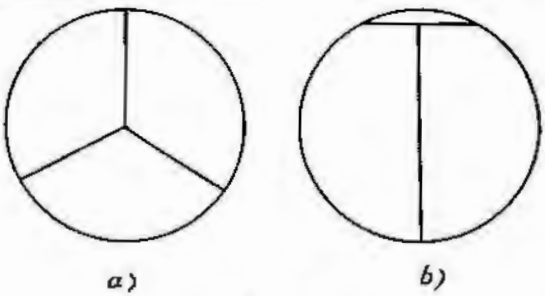


FIG. 11

cada una de éstas sea menor que d, pero satisfaciendo dicha condición puede ser dividido en tres partes. Idéntica propiedad la tendrá un triángulo equilátero cuyo lado sea igual a d (si está dividido en dos partes, cualquiera de éstas deberá contener *dos* vértices del triángulo y entonces el

diámetro de esta parte será igual a d). Sin embargo, hay figuras que pueden ser divididas en *dos* partes de menor diámetro (fig. 12, *a*, *b*).

a) *b*)

FIG. 12

Para cualquier figura F podemos considerar el problema de su división en *partes de diámetro menor* (4). El número mínimo de partes que en este caso son necesarias, lo designaremos por $a(F)$. Por lo tanto, si F es un círculo o triángulo equilátero, $a(F)=3$, mientras que si es una elipse o paralelogramo, $a(F)=2$.

El eminente matemático polaco K. Borsuk (5), en el año 1933, planteó y resolvió el problema de los valores que puede tomar $a(F)$.

§ 3.

TEOREMA DE BORSUK

Como ya hemos visto, para ciertas figuras planas $a(F)$ toma un valor igual a 2, para otras, a 3. Se plantea la pregunta: ¿es posible encontrar una figura plana para la que $a(F)>3$, o sea, tal figura que al dividirla en partes de menor diámetro no sean suficientes tres partes y haya que dividirla en cuatro o en mayor número de éstas? Resulta que, en realidad, siempre son suficientes tres partes, es decir, es justo el siguiente teorema, establecido por Borsuk:

Teorema 1. *Toda figura plana F de diámetro d puede ser dividida en tres partes de diámetro menor que d, es decir,* $a(F)\leqslant 3$.

La parte principal de la demostración de dicho teorema, es el lema que el matemático húngaro Pall demostró en el año 1920:

Lema 1. *Toda figura plana de diámetro d puede ser situada en un hexágono regular, en el que la distancia entre sus lados paralelos es igual a d* (fig. 13).

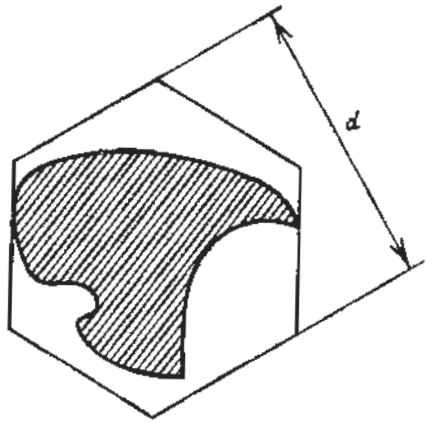


FIG. 13

Demostración. Tomemos una recta l, que no interseque a la figura F y aproximémosla paulatinamente a esta última (manteniéndola paralela a sí misma), hasta que la recta que desplazamos haga contacto con la figura F (fig. 14).

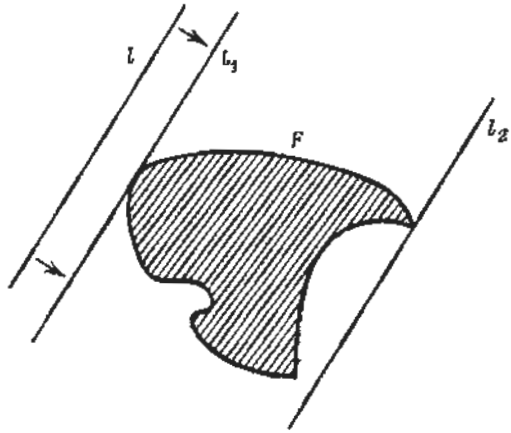


FIG. 14

La recta l_1 obtenida, posee la propiedad de tener por lo menos un punto común con la figura F y además, dicha figura se dispone íntegramente sólo por un lado de la recta l_1. Tal recta se denomina *recta de apoyo* de la figura F(⁵). Tracemos, además, la segunda recta de apoyo l_2 paralela a l_1 (fig. 14). Está claro, que toda la figura F se encuentra en la zona entre las dos rectas l_1 y l_2 y, que la distancia entre dichas rectas no será mayor que d (ya que el diámetro de la figura F es igual a d).

A continuación, tracemos dos rectas de apoyo m_1, m_2 paralelas de la figura F, que formen con l_1 un ángulo de 60° (fig. 15). Las rectas l_1, l_2, m_1, m_2 formarán el paralelogramo

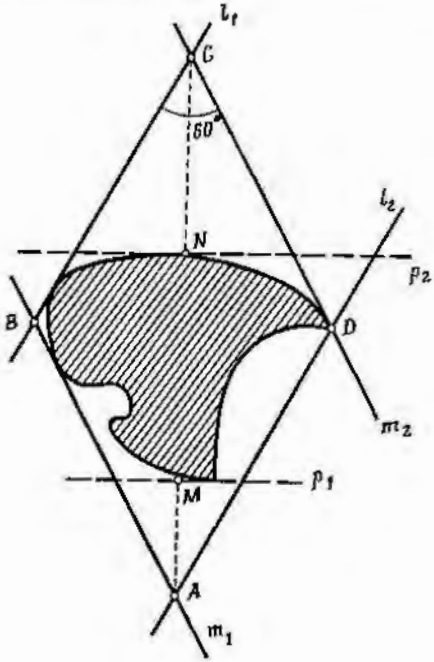


FIG. 15

$ABCD$, con un ángulo de 60° y alturas que no son mayores que d y en el que se encuentra por completo la figura F.

Seguidamente, tracemos dos rectas de apoyo p_1, p_2 de

la figura F que formen con l_1 un ángulo de 120° y designemos por M y N los pies de las perpendiculares bajadas a estas rectas desde los extremos de la diagonal AC del paralelogramo (fig. 15). Podemos mostrar que la dirección de la recta l_1 puede ser elegida de tal forma, que sea válida la igualdad $AM=CN$. En efecto, supongamos que $AM \neq CN$ y que $AM<CN$. Por lo tanto, la magnitud $y=AM-CN$ será *negativa*. Seguidamente, comencemos a variar ininterrumpidamente la dirección de la recta l_1 de tal forma que ella gire hasta 180° (quedando la figura F inmóvil). Junto con la recta l_1, cambiarán su posición las demás rectas l_2, m_1, m_2, p_1, p_2 (ya que su posición se determina por la de la recta l_1). Por esta razón, al girar la recta l_1 se desplazarán constantemente los puntos A, C, M, N(?) y por consiguiente, variará constantemente la magnitud $y=AM-CN$. Pero cuando la recta l_1 gire hasta 180°, ella ocupará la posición que ocupaba anteriormente la recta l_2. Por lo tanto, obtendremos el *mismo* paralelogramo que se muestra en la fig. 15, pero en éste los puntos A y C, así como M y N, habrán cambiado sus "papeles". O sea, en esta posición la magnitud de y será *positiva*. Si a continuación, representamos el gráfico de la variación de la magnitud de y, al girar la recta l_1 desde 0 hasta 180° (fig. 16), veremos que puede

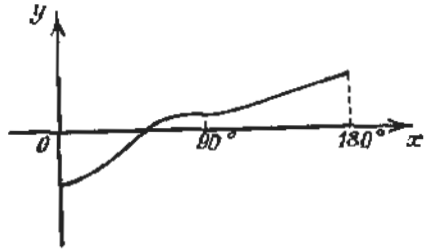


FIG. 16

hallarse una posición de la recta l_1, con la que la magnitud de y *se reduce a cero*, es decir, $AM=CN$ (ya que dicha magnitud variando desde su valor negativo hasta el positivo, deberá en cierto momento ser igual a cero). Examinemos la posición de todas nuestras rectas, precisamente en el

momento cuando la magnitud de y es igual a cero (fig. 17). De la igualdad $AM=CN$ se deduce que el hexágono formado por las rectas l_1, l_2, m_1, m_2, p_1, p_2 es centrosimétrico. Cada uno de los ángulos de este hexágono es igual a 120° y la

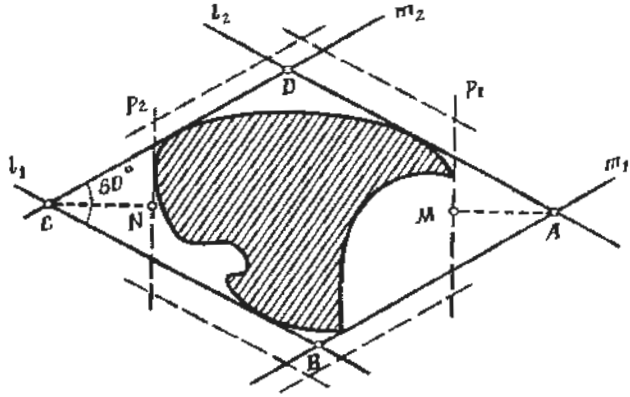


FIG. 17

distancia entre sus lados opuestos no es mayor que d. Si la distancia entre las rectas p_1 y p_2 es *menor* que d, desplazaremos dichas rectas (a distancias equivalentes) hasta que entre ellas, después de su desplazamiento, la distancia sea igual a d. De la misma manera procederemos con las rectas l_1, l_2 y a continuación, con m_1, m_2. Como resultado, obtendremos un hexágono centrosimétrico (ángulos de 120°), cuyos lados opuestos están alejados unos de otros a una distancia igual a d (hexágono punteado en la fig. 17). De todo lo dicho, se desprende que todos los lados del hexágono son iguales, es decir, que es regular y que la figura F se sitúa por completo en el interior de dicho hexágono.

Demostración del teorema 1. Sea F una figura de diámetro d. En virtud del lema demostrado anteriormente, la figura F está situada en el interior de un hexágono regular, cuyos lados opuestos están recíprocamente alejados a una distancia igual a d. Es preciso de mostrar que dicho hexágono puede ser dividido en tres partes y que el diámetro de cada una de éstas será menor que d. En este caso la figura F también se dividirá en tres partes y el diámetro de cada de

éstas igualmente será menor que d. La división en tres partes de un hexágono regular de la forma anteriormente indicada se muestra en la fig. 18 (los puntos P, Q y R son los puntos medios de los lados y O, el centro del hexágono). Para cerciorarse de que los diámetros de las partes por separado son menores que d, es suficiente señalar que en el triángulo PQL, el ángulo Q es recto y por consiguiente, $PQ<PL=d$.

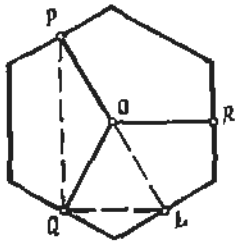


FIG. 18

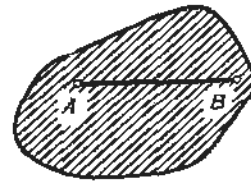


FIG. 19

De esta forma, el teorema 1 queda demostrado.

De la demostración del teorema 1 se deduce fácilmente que *toda figura plana de diámetro d puede ser dividida en tres partes y el diámetro de cada una de éstas no será mayor que* $d\sqrt{3}/2 \approx 0{,}8660\, d$ (ya que de la igualdad $PL=d$ se deduce con facilidad que $PQ=d\sqrt{3}/2$; véase la figura 18). Esta apreciación de los diámetros es la más ventajosa, ya que podemos ver con facilidad que *un círculo de diámetro d no puede ser dividido en tres partes siendo el diámetro de cada una de éstas menor que* $d\sqrt{3}/2$.

En efecto, la parte cuyo diámetro es menor que $d\sqrt{3}/2$, corta en la circunferencia un conjunto situado en un arco menor que 120° y por esta razón, tres partes como la indicada no cubren por completo la circunferencia.

§ 4.

FIGURAS CONVEXAS

¿A qué será igual el número $a(F)$ para una figura F dada arbitrariamente de diámetro d? El teorema de Borsuk sólo nos da una apreciación de $a(F)$ *desde arriba*: $a(F)\leqslant 3$. Al

mismo tiempo, es evidente que $a(F) \geqslant 2$ para cualquier figura F. Es natural que se plantea el problema de aclarar para qué figuras planas F el número $a(F)$ es igual a dos

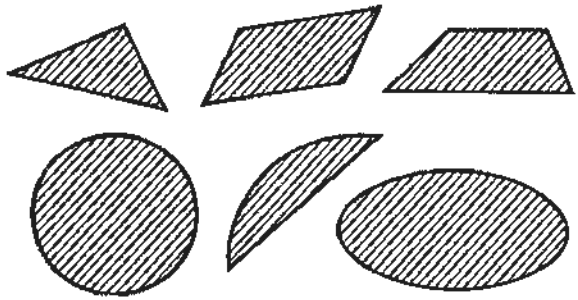


FIG. 20

y para cuáles, a tres. La solución de este problema se dará en el § 7. Al exponer esta solución, nos serán necesarias ciertas nociones sobre *figuras convexas*, que examinaremos en

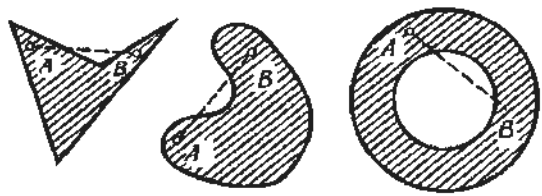


FIG. 21

éste y los dos párrafos siguientes, por lo general, sin demostraciones, sólo con ilustrativas explicaciones*).

*) Una información más detallada sobre figuras convexas (y en particular, la demostración de las propiedades de estas figuras que se dan en la presente lección), nuestros lectores pueden encontrarla en los libros en idioma ruso: *L. A. Lusternik*, Figuras convexas y polígonos, Gostejisdat, M, 1956; *I. M. Yaglom* y *V. G. Boltianski*, Figuras convexas, Gostejisdat, M, 1951. A este tema está también dedicado el artículo "Figuras y cuerpos convexos" en el V tomo de la Enciclopedia de matemáticas elemental (págs. 181-269).

Una figura F se llama *convexa* si junto con cada dos puntos A y B, ella contiene íntegramente el segmento AB que los une (fig. 19). Por ejemplo, son figuras convexas el triángulo, paralelogramo, trapecio, círculo, segmento de un círculo, elipse, etc. (fig. 20). En la fig. 21 se dan ejemplos que muestran figuras que no son convexas. Las figuras representadas en la fig. 20 son *acotadas*, pero también hay figuras convexas *no acotadas* ("que se extienden al infinito"): semiplanos, ángulos menores de 180°, etc. (fig. 22).

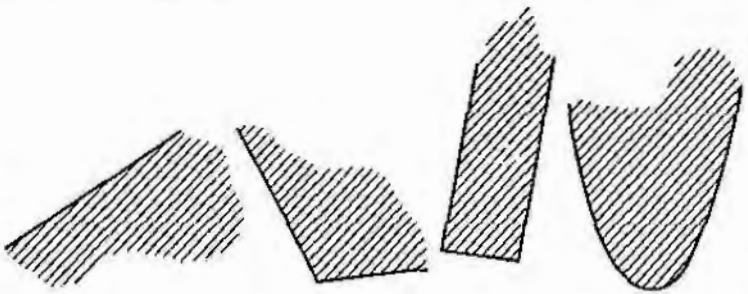


FIG. 22

Los puntos de toda figura F pueden ser: *interiores* y *límite (frontera)*. Se llaman interiores a aquellos puntos que por todos los lados están rodeados por los de la figura F. De este modo, si A es un punto interior de la figura F, entonces, un círculo de cierto radio (por muy pequeño que sea) con el centro en el punto A, pertenece íntegramente a la figura F (fig. 23). Al punto límite de la figura F pueden aproximarse cuanto se desee, tanto los puntos que pertenecen a dicha figura, como aquellos que no le pertenecen (el punto B en la fig. 23). Todos los puntos límites tomados en conjunto, forman cierta línea llamada *contorno* de la figura F. Si una figura convexa F es acotada, su contorno lo formará una línea cerrada (véanse las figs. 19, 20).

Para la posterior exposición, es importante señalar, *que cualquier recta que pasa por un punto interior de una figura convexa acotada F, interseca el contorno de dicha figura sólo por dos puntos* (fig. 24) y que el segmento que une a estos dos puntos pertenece a la figura F, mientras que

la parte restante de dicha recta se encuentra fuera de los límites de dicha figura.

Sea B cierto punto límite de la figura convexa F. Desde dicho punto, tracemos todos los rayos posibles que pasen

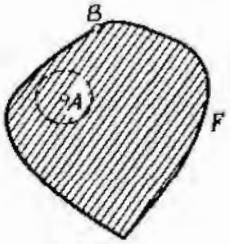


FIG. 23

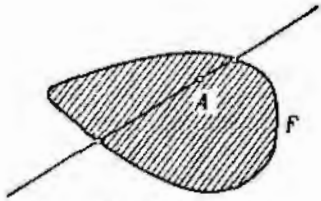


FIG. 24

por puntos de la figura F, diferentes de B. Dichos rayos ocuparán cierto semiplano (fig. 25,*a*), o cierto ángulo menor que 180° (fig. 25, *b*). En el primer caso, la recta que limita

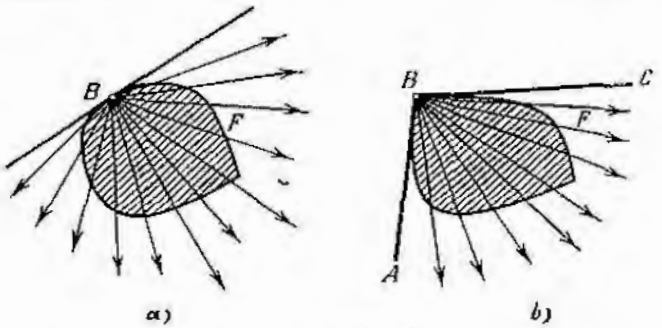


FIG. 25

el semiplano es la recta de apoyo de la figura F. Cualquier otra recta que pasa por el punto B, dividirá la figura en dos partes (fig. 26), es decir, no será la de apoyo. En otras palabras, en este caso, por el punto B pasa una sola recta de apoyo de la figura F, llamada *tangente* a dicha figura en el punto B. En el segundo caso, (fig, 25, *b*), toda la figura F

está situada en el interior del ángulo ABC menor que 180° y por dicha razón, por el punto B pasa un número infinito

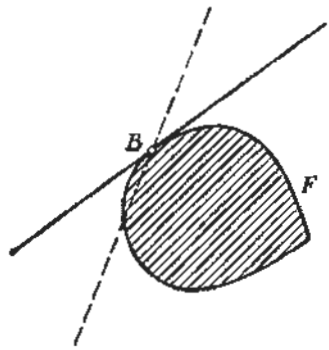


FIG. 26

de rectas de apoyo de la figura F (fig. 27). Particularmente, son de apoyo las rectas BA y BC. Los rayos BA y BC (tra-

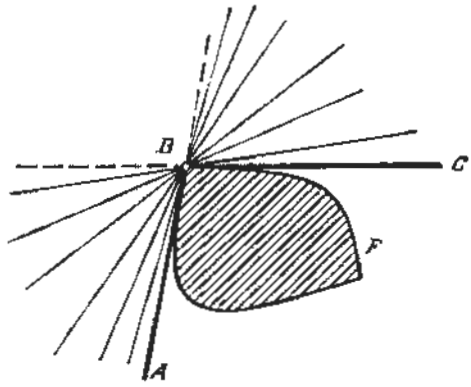


FIG. 27

zados en la fig. 27 con líneas gruesas) se denominan *semitangentes* a la figura F en el punto B.

Considerando conjuntamente estos dos casos, vemos que *por cada punto límite B de la figura convexa F pasa, por*

lo menos, una recta de apoyo de dicha figura. Si por el punto B pasa sólo una recta de apoyo de la figura F (fig. 25, *a*), dicho punto se llamará punto límite *regular* de esta figura. Si por el punto B pasa un número infinito de rectas de apoyo de la figura F, entonces llamaremos a B, punto *anguloso* (fig. 25, *b*).

Ahora supongamos que F_1 y F_2 son dos figuras convexas. En este caso, la *intersección* de estas figuras (o sea, su parte común) también será una figura convexa (fig. 28). En la fig. 29, se muestran dos figuras convexas: el círculo F_1 y el ángulo F_2, con el vértice en el centro del círculo; la intersección de las dos figuras es un sector circular. En la fig. 30 las dos figuras convexas F_1, F_2 no son acotadas (cada una de ellas es una banda); la intersección de estas figuras forma un paralelogramo. Todo lo expuesto anteriormente se refiere no sólo a dos figuras, sino que también a un mayor número de éstas: *la intersección de cualquier número (incluso infinito) de figuras convexas, forma otra figura convexa*(6). En la fig. 31 se muestra que un polígono convexo se forma por la intersección de un número finito de semiplanos. El círculo (fig. 32) es también la intersección de semiplanos, pero su número es infinito. En general, cualquier figura convexa se puede representar como la intersección de un número infinito de semiplanos.

Sean F una figura convexa y A un punto que no pertenece a ella. En este caso, existirá una recta que *separa* el punto A de la figura F, o sea, una recta por un lado de la cual está situada por completo la figura F, mientras que por el otro está situado el punto A (fig. 33). Esta propiedad de las figuras convexas, es característica: *si cualquier punto que no pertenece a la figura F, puede ser separado de ella por una recta, dicha figura es convexa.* En otras palabras, que si la figura F no es convexa, puede hallarse un punto que no pertenece a ella y que no pueda ser separado de la figura F por ninguna recta (fig. 34).

En resumen señalemos que para toda figura F de diámetro d, existe una figura convexa mínima $\tilde{F}$, en la que F puede estar situada por completo; dicha figura (fig. 35) llamada *cubierta (cápsula) convexa de la figura F*, también tiene *el mismo* diámetro d. Es posible que la figura F sea *discontinua*, es decir, que consto de dos o varias partes independientes y sin embargo, incluso en este caso, puede

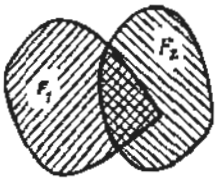


FIG. 28

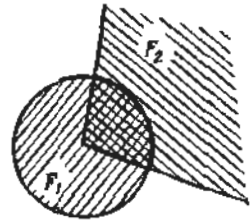


FIG. 29

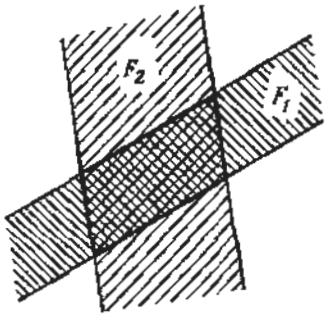


FIG. 30

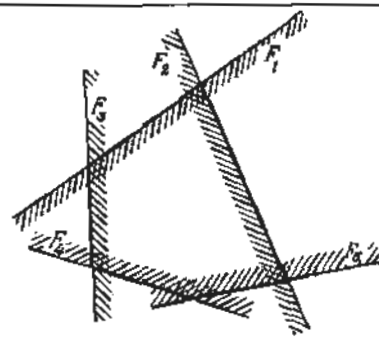


FIG. 31

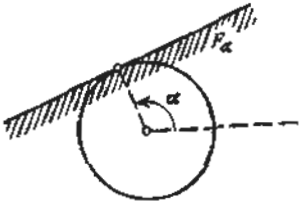


FIG. 32

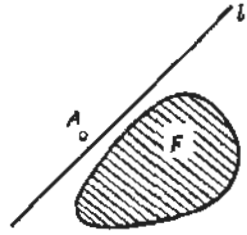


FIG. 33

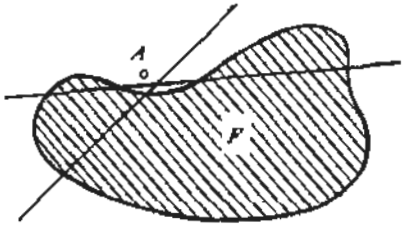


FIG. 34

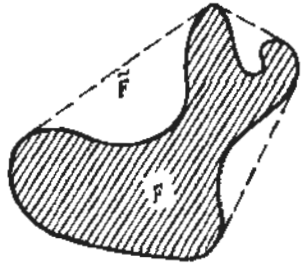


FIG. 35

ser hallada su cubierta convexa. Por ejemplo, en la fig. 36, se muestra la cubierta convexa de la figura F formada por dos partes independientes F_1, F_2 y el punto A.

Podemos representar la cubierta convexa de la forma siguiente: por la parte exterior de la figura F se tensa un hilo flexible (de "goma"): entonces, la línea por la que se dispone el hilo será el contorno de la cubierta convexa $\bar{F}$.

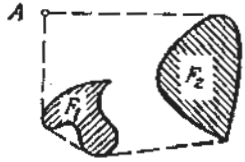


FIG. 36

Sin embargo, esta descripción sólo es ilustrativa. La definición exacta de la cubierta convexa, se expone de la forma siguiente. Es preciso considerar *todas* las figuras convexas que contienen la figura F; en este caso, la intersección de todas ellas será la cubierta convexa de la figura F. En efecto, de acuerdo con lo dicho anteriormente, la indicada intersección será una figura *convexa*. Es también claro, que dicha intersección contiene a la figura F y es la figura convexa *mínima* que posee dicha propiedad.

§ 5.
FIGURAS DE ANCHO CONSTANTE

Supongamos que F es una figura convexa acotada y l, una recta. Tracemos para la figura F dos rectas de apoyo paralelas a l. La distancia h entre las dos rectas de apoyo se llama *ancho* de la figura F en dirección a l. Al examinar la fig. 37, es fácil deducir que la altura del triángulo equilátero es simultáneamente su ancho mínimo mientras que su lado, el máximo. El ancho del círculo es igual en cualquier dirección, es decir, igual a su diámetro. Puede parecer que el círculo es la única figura convexa que tiene esta

propiedad. Sin embargo, esto no es así: hay una multitud infinita de *figuras de ancho constante*, es decir, de aquellas figuras cuyo ancho es igual en todas las direcciones. El

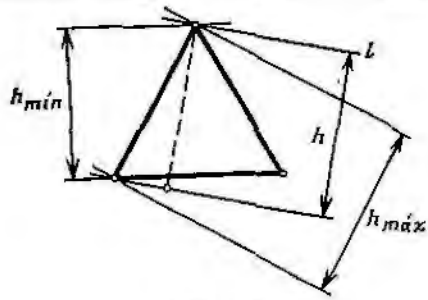


FIG. 37

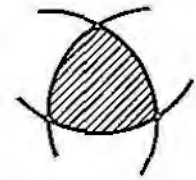


FIG. 38

ejemplo más sencillo de tal figura es el *triángulo de Reuleaux*, mostrado en la fig. 38. Es la intersección de tres círculos de radio h, cuyos centros están situados en los vértices de un triángulo equilátero, cuyo lado es igual a h.

En general, si F es un polígono regular con un número impar de vértices y si h es la longitud de la mayor de sus

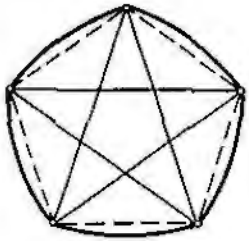


FIG. 39

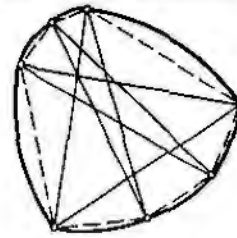


FIG. 40

diagonales, entonces, uniendo cada dos vértices adyacentes con el arco de una circunferencia de radio h con centro en el vértice opuesto, obtendremos una figura de ancho constante h (fig. 39). La indicada construcción también tiene lugar en el caso cuando un polígono de diámetro h con número impar de lados sea irregular, pero de cada uno de sus vértices parten dos diagonales de longitud h (fig. 40).

Las figuras de ancho constante tienen una serie de propiedades interesantes; aquí sólo indicaremos algunas de las más sencillas*).

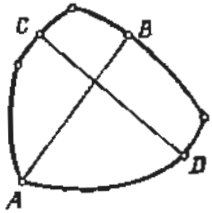


FIG. 41

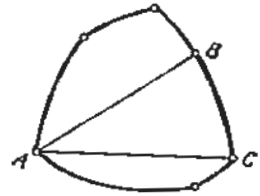


FIG. 42

Señalemos, ante todo, que el diámetro de una figura de ancho constante es igual a su ancho: $d=h$. Por cada uno de los puntos límites de la figura de ancho constante d pasa,

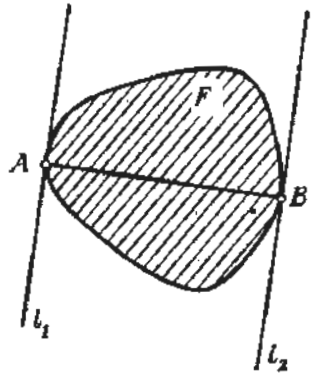


FIG. 43

por lo menos, un *diámetro* de esta figura (o sea, una cuerda de una longitud d). De esto se desprende que *para toda figura F de ancho constante es válida la igualdad* $a(F)=3$.

*) La demostración de dichas propiedades puede encontrarse en el libro de *I. M. Yaglom* y *V. G. Boltianskĭ* indicado en la pág. 19.

Además, el *contorno* de la figura de ancho constante d no puede ser dividido en dos partes de menor diámetro. Esto se demuestra de la misma manera que para la circunferencia (pág. 11 y observación (3)).

Dos diámetros cualesquiera de una figura de ancho constante siempre se intersecan (en el interior de la figura o en su contorno, fig. 41, 42). En este caso, si dos diámetros AB y AC tienen un punto *límite* común A, entonces, el arco BC de radio d con centro en el punto A, se encuentra íntegramente en el contorno de la figura (fig. 42).

Señalemos, en fin, que si F es una figura de ancho constante y AB, su diámetro, las rectas l_1 y l_2 que pasan por los puntos A y B y que son perpendiculares al segmento AB serán rectas de apoyo de la figura F (fig. 43).

§ 6.
INTRODUCCIÓN DE UNA FIGURA EN OTRAS DE ANCHO CONSTANTE

Retornemos a la fig. 39 y designemos por M el polígono regular que está representado en ella y por F, la figura de ancho constante que lo contiene. De esta forma, el polígono M de diámetro d está situado en la figura F de ancho constante d.

Para los polígonos regulares con un número par de lados, tal construcción no es factible. Sin embargo, en este caso sigue siendo válido que un polígono regular con diámetro d puede ser introducido en una figura de ancho constante d (fig. 44). Es interesante señalar que para un polígono regular con un número *impar* de vértices, existe *una sola* figura de ancho constante y del mismo diámetro que lo contiene. Para un polígono regular con un número par de lados, la figura de ancho constante (y del mismo diámetro) que lo contiene no es *una sola*. Por ejemplo, un cuadrado de diámetro d, puede estar situado no sólo en la figura que se muestra en la fig. 44, sino que también en el círculo circunscrito que, como es evidente, es una figura de ancho constante d.

Todo lo expuesto anteriormente sobre la posibilidad de introducir polígonos regulares en figuras de ancho constante tiene una generalización de gran importancia. Tiene lugar el siguiente teorema:

Teorema 2. *Toda figura de diámetro d puede ser introducida en cierta figura de ancho constante d.*

Con objeto de demostrar este teorema, establezcamos previamente una noción y demostremos tres lemas.

Sea F una figura plana arbitraria, cuyo diámetro no es mayor que d. Es claro, que podemos encontrar un círculo

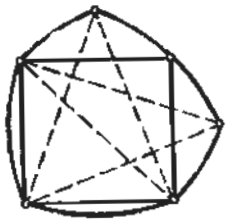


FIG. 44

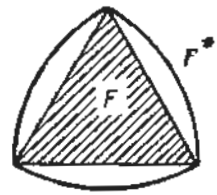


FIG. 45

de radio d que contenga por completo la figura F (por ejemplo, si A es un punto arbitrario de la figura F, el círculo de radio d con centro en A contiene por completo a F). La intersección de *todos* los círculos de radio d que contienen la figura F, la designaremos por F^* y la llamaremos *d-extensión* (o bien, simplemente *extensión*) de la figura F. Por ejemplo, si F es un triángulo equilátero con lado d, F^* será un triángulo de Reuleuax (fig. 45).

De la definición dada, se desprende que la extensión de una figura convexa F (con diámetro que no sea mayor que d), tamhién será una figura convexa.

Lema 2. *Sea F una figura de diámetro d. Entonces su extensión F^* tiene también un diámetro d.*

Demostración. Supongamos que A y B son puntos arbitrarios de la figura F^*. Tomemos un punto arbitrario M do la figura F y examinemos el círculo K_M de radio d con contro en el punto M (fig. 46). Este círculo contiene por completo la figura F y por consiguiente, es uno de aquellos círculos que en su intersección forman la figura F^*. Por esta razón, esta última figura estará contenida en el cír-

culo K_M. En particular, el punto A pertenece al círculo K_M y por lo tanto

$$AM \leqslant d.$$

Así, $AM \leqslant d$ para todo punto M de la figura F. Por consiguiente, el círculo K_A de radio d y con centro en el punto A, contiene toda la figura F (fig. 47) y por lo tanto,

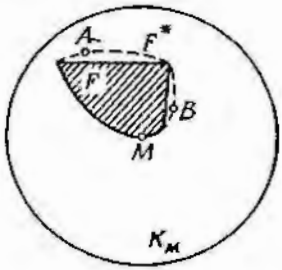


FIG. 46

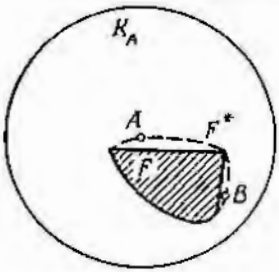


FIG. 47

es uno de aquellos círculos que en su intersección forman la figura F^*. De todo lo dicho se deduce que la figura F^* está situada por completo en el círculo K_A. En particular, el punto B pertenece al círculo K_A y por lo tanto $AB \leqslant d$.

De ese modo, la distancia entre los puntos arbitrarios A y B de la figura F^* no sobrepasa a d, es decir, el diámetro de esta figura no es mayor que d. Pero a su vez, no es menor que d, ya que la figura F^* contiene por completo la figura F de diámetro d.

Lema 3. *Sean F una figura de diámetro d y F^*, su extensión. Supongamos, además, que M es un punto límite arbitrario de la figura F^*, y l una línea de apoyo de F^* que pasa por el punto M. En este caso, el círculo K_l de radio d, que hace contacto con la recta l en el punto M y que está situado por el mismo lado de la recta l que la figura F, contiene por completo la figura F^* (fig. 48).*

Demostración. Supongamos que el círculo K_l no contiene la figura F^*, es decir, que se puede hallar un punto A que pertenece a la figura F^* y que se encuentra fuera del círculo K_l. Tracemos por los puntos M y A una circunferencia S de radio d, cuyo centro esté situado por el mismo lado

de la recta l que la figura F^* (fig. 49). Ya que la circunferencia S se diferencia de la del círculo K_l, la primera *no hará contacto* con la recta l en el punto M, es decir, interseca la recta l. Por consiguiente, el arco AM de la circunferencia S (menor que semicircunferencia) interseca la recta

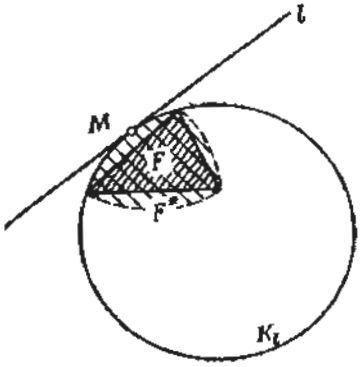


FIG. 48

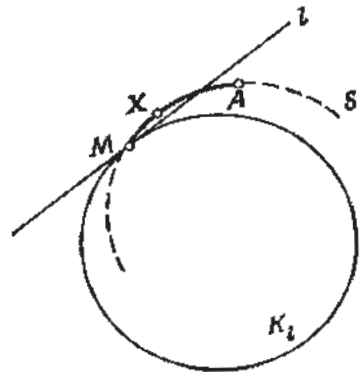


FIG. 49

l, o sea, que en el arco AM se halla un punto X situado por el lado de la recta l opuesto a la figura F^*. Supongamos a continuación que K es un círculo arbitrario de radio d, que contiene la figura F. En este caso, este círculo contiene también la figura F^* (ya que K es uno de los círculos que en su intersección forman la figura F^*) y por lo tanto, los puntos A y M pertenecen al círculo K. En virtud de lo dicho, se desprende que el círculo K contiene por completo el arco AM; en particular, el punto X pertenece al círculo K. Así, todo círculo de radio d que contiene una figura F, contiene simultáneamente el punto X y por esta razón, este punto pertenece a la figura F^* a pesar de que l es la recta de apoyo de la figura F^*. Esta contradicción demuestra el lema dado.

Lema 4. *Si F es una figura convexa de diámetro d y no es una figura de ancho constante, existe una figura convexa H de diámetro d que contiene la figura F y que es diferente de ella (y que por consiguiente, tiene una área mayor)* (*).

Demostración. Examinemos la extensión F^* de la figura F. Si esta última no coincide con F^*, la figura

$$H = F^*$$

es la que buscamos: contiene la figura F, su diámetro es igual a d y, evidentemente, tiene una área mayor que la de la figura F.

A continuación, supongamos que la figura F coincide con F^*. Como F no es una figura de ancho constante d, pueden hallarse dos líneas de apoyo paralelas l' y l'' de la figura F la distancia entre las cuales es menor que d. Designemos por M el punto común de la recta l' y la figura F y por K, un círculo de radio d que hace contacto con la recta l' en el punto M y que está situado por el mismo lado de la recta l' que la figura F (fig. 50).

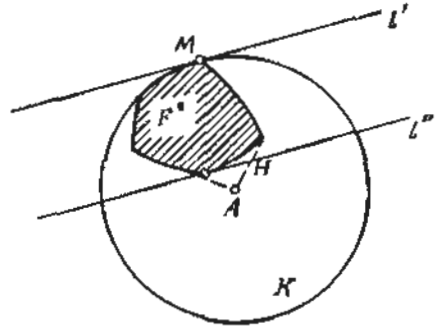


FIG. 50

Designemos por A el centro del círculo K. El punto A no pertenece a la figura F (ya que $AM=d$ y la distancia entre l' y l'' es menor que d). De acuerdo con el lema 3, el círculo K contiene por completo la figura $F=F^*$. Por consiguiente, para todo punto M de la figura F, el segmento AM no es mayor que d. En otras palabras, la figura F' formada por F y el punto A, tiene un diámetro d. La cubierta convexa H de la figura F' (fig. 50), también tiene un diámetro d. Ya que el área de la figura H es evidentemente mayor que la de la figura F (recordemos que el punto A no pertenece a F), la figura H es la incógnita.

Demostración del teorema 2. Sea F una figura de diámetro d. Si su extensión F^* es una figura de ancho constante, el teorema es válido.

Supongamos a continuación, que F^* no es una figura de ancho constante. Estudiemos las más diversas figuras de diámetro d que contienen la figura F^*. Ya que toda figura de diámetro d se encuentra por completo en cierto círculo de radio d, el área de cualquiera de estas figuras no sobrepasa a πd^2. Llamemos k al *mayor* de aquellos números enteros que demuestran que existe una figura de diámetro d que contiene a F^* y que tiene una área mayor o igual a k. Elijamos una de tales figuras y denominémosla H_0. Es evidente que H_0 posee las siguientes propiedades: tiene diámetro d y toda figura de diámetro d que la contiene, tiene una área mayor que la de la primera sólo en 1 (ya que de lo contrario, en lugar de k se podría tomar $k+1$).

Ahora, designemos por k_1 el mayor de aquellos números enteros que demuestran que existe una figura convexa de diámetro d que contiene a H_0 y que tiene una área mayor o igual a $k+\frac{k_1}{10}$. Entre dichas figuras, elegimos una y la llamamos H_1. Así, H_1 contiene la figura H_0, tiene un diámetro d y toda figura convexa de diámetro d que contiene H_1, supera al área de H_1 en no más de 1/10.

Exactamente, del mismo modo, trazaremos la figura convexa H_2 de diámetro d, que contiene la figura H_1 y que posee la propiedad de que toda figura convexa de diámetro d que contiene H_2, supera su área en no más de 1/100. A continuación, realizamos tal construcción para 1/1000, etc.

Al efectuar esta construcción, pueden presentarse dos posibilidades: bien en cierto momento de la indicada construcción se obtiene una figura H_n, que es ya de ancho constante d (y en la que acaba la construcción), o bien ninguna de las figuras H_n será de ancho constante y obtendremos una serie infinita de figuras convexas H_0, H_1, ..., H_n, ..., cada una de las cuales se contiene en la siguiente. En el primer caso, cuando la construcción termina en la figura H_n, que tiene ancho constante d, dicha figura H_n será evidentemente la buscada. En el segundo caso, designamos por H el conjunto de todas las figuras H_0, H_1, ..., H_n, ... En otras palabras, H consta de todos aquellos puntos, cada

uno de los cuales pertenece a cualquiera de las figuras H_n[10].

La figura H es convexa. Efectivamente, supongamos que A y B son dos puntos de dicha figura. En este caso, A pertenecerá a cierta figura H_n mientras que B, a cierta figura H_m. Para mayor certeza, sea $n \geqslant m$. Entonces, la figura H_m se encuentra por completo en H_n. Por consiguiente, los *dos* puntos A, B pertenecen a la figura H_n y junto con ellos, a dicha figura pertenece el segmento AB. Pero en este caso, el indicado segmento pertenece a la figura H, lo que significa que dicha figura es convexa.

Más adelante, vemos con evidencia que el diámetro de la figura H es d. Naturalmente, supongamos que A y B son dos puntos arbitrarios de la figura H. Entonces, como vimos anteriormente, estos dos puntos pertenecen a cierta figura H_n. Y como el diámetro de H_n es igual a d, $AB \leqslant d$.

Demostremos finalmente, que H es una figura de ancho constante d. Supongamos lo contrario. En este caso, en virtud del lema 4, existe una figura convexa H' de diámetro d que contiene la figura H y cuya área es mayor. Sea n tal número natural que la diferencia de las áreas de las figuras H' y H, es mayor que $1/10^n$. Por lo tanto, la diferencia entre las áreas de las figuras H' y H_n indudablemente será mayor que $1/10^n$. Pero este resultado, contradice a la elección de la figura H_n. La contradicción mostrada, finaliza la demostración del teorema.

§ 7.

¿PARA QUÉ FIGURAS $a(F)=3$?

Como ya señalamos, hay casos cuando una figura de diámetro d sólo puede ser completada unívocamento hasta otra figura de ancho constante d (como por ejemplo, en el caso de un polígono regular con número impar de lados). En otros casos, tal operación no puede realizarse unívocamente. Otro ejemplo de figura, que permite hallar variadas soluciones para completarla hasta otra de ancho constante, puede ser un círculo del que se ha cortado un segmento con un arco que sea menor que la semicircunferencia. El diá-

metro d de esta figura F es, por lo visto, igual al diámetro del círculo inicial K. Por lo tanto el círculo K es una de las figuras de ancho constante d que contiene la figura F. Otro tipo de complemento hasta una figura de ancho constante se muestra en la fig. 51 (en la que $AN=NB=CA=BD=d$ y $\smile AB$, $\smile DN$, $\smile CN$, son acros de *radio d*).

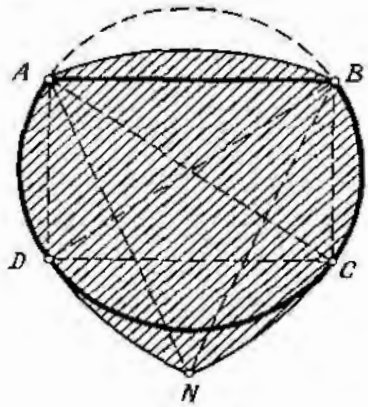


FIG. 51

Ahora, retornemos al problema de la definición de las figuras F para las que $a(F)=3$, que fue planteado al principio del § 4. En el presente párrafo, daremos la solución de este problema hallada por V. G. Boltianski el año 1969.

Teorema 3. *Para una figura plana F de diámetro d, la igualdad $a(F)=3$ es válida en el caso y sólo en el caso cuando la figura F se completa unívocamente hasta una figura de ancho constante d.*

Por ejemplo, para todo polígono regular F con número impar de lados es válida la igualdad $a(F)=3$, mientras que para todo polígono regular con número par de lados, $a(F)=2$ (la última igualdad está clara directamente; véase la fig. 52). Así mismo, un círculo con un segmento cortado (véase la fig. 51) satisface la igualdad $a(F)=2$ (lo que también está claro directamente; véase la fig. 53).

Demostremos una serie de proposiciones auxiliares, antes de pasar a la demostración del teorema 3.

Lema 5. *Sea F una figura plana convexa de diámetro d. Si existe un círculo de radio d que contiene la figura F y cuyo centro no pertenece a la figura F^*, en tal caso la figura*

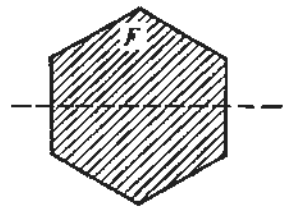


FIG. 52

F se completa no unívocamente hasta otra figura de ancho constante d.

Demostración. Sea K un círculo de radio d que contiene la figura F y cuyo centro A no pertenece a la figura F^*. Como esta última es la intersección de todos los círculos

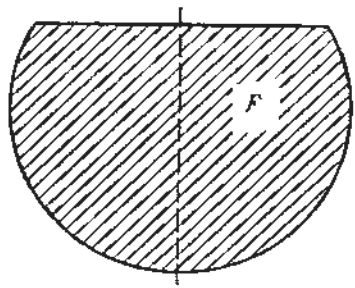


FIG. 53

de radio d que contienen la figura F y ya que el punto A no está situado en la figura F^*, podemos hallar un círculo K' de radio d que contiene la figura F y no el punto A. Llamemos B al centro del círculo K' (fig. 54). Claro está, que la longitud del segmento AB es *mayor* que d (ya que el círculo K' no contiene el punto A).

Más adelante, uniendo el punto A a la figura F, obtenemos una figura discontinua F', cuyo diámetro, como se

ve fácilmente, será igual a d. (Efectivamente, la distancia desde el "nuevo" punto A hasta todo punto de la figura F no es mayor que d, ya que F se encuentra en el círculo K). De esta misma forma, uniendo el punto B a la figura F, obtenemos una figura discontinua F'', cuyo diámetro es igual a d. Tomemos a continuación, cualquier figura Φ' de ancho constante d y que contiene la figura F'' y otra cualquier figura Φ'' de ancho constante d y que contiene la fi-

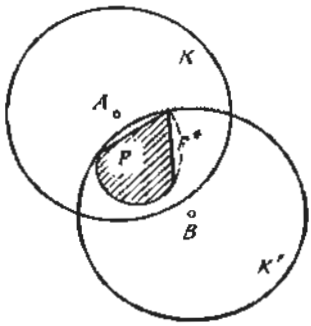


FIG. 54

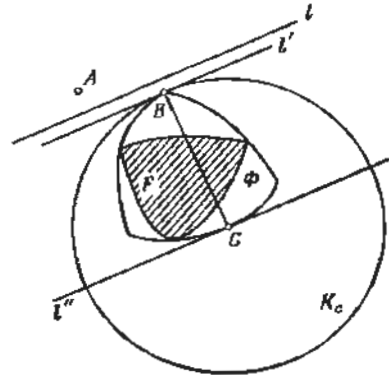


FIG. 55

gura F'' (esto puede ser realizado de acuerdo con el teorema 2). Claro está que las figuras Φ' y Φ'' no pueden coincidir (ya que $AB>d$ y por lo tanto, ninguna figura de ancho constante d no puede contener los dos puntos A y B). Sin embargo, en cada una de las figuras Φ' y Φ'', puede encontrarse la figura F. Por esta razón, F se completa hasta otra figura de ancho constante d no unívocamente.

Lema 6. *Sea F una figura de diámetro d y Φ, una figura de ancho constante d, que contiene la figura F. En tal caso, Φ contiene por completo la figura F^*.*

Demostración. Sea A un punto arbitrario que no pertenece a la figura Φ. Tracemos una recta l que separa el punto A de la figura Φ. Designemos por l' y l'' las rectas de apoyo de la figura Φ, paralelas a l y por B y C, los puntos comunes de estas rectas y la figura Φ (fig. 55). En tal caso, el segmento BC es perpendicular a las rectas l', l'' y tiene longi-

tud d. Llamemos K_C a un círculo de radio d, cuyo centro está situado en el punto C. Este círculo, contiene por completo la figura Φ y a consecuencia de esto, contiene también la figura F. Por lo tanto, K_C es uno de los círculos que en su intersección forma la figura F^*. Por consiguiente, F^* se encuentra íntegramente en el círculo K_C. Como el punto A no pertenece al círculo K_C, tampoco pertenece a la figura F^*. Pues bien, si el punto A no pertenece a la figura Φ, tampoco pertenece a F^*. Lo cual significa, que F^* está por completo situada en la figura Φ.

Lema 7. *Una figura F de diámetro d se completa unívocamente hasta otra figura de ancho constante d en el caso y sólo en el caso cuando su extensión F^* es también una figura de ancho constante d.*

Demostración. Sean F^* una figura de ancho constante d y H, una figura arbitraria de ancho constante d, que contiene F. En virtud del lema 6, la figura H debe también contener por completo la figura F^*. Ya que F^* es una figura de ancho constante d, de aquí se desprende que H coincide con F^*. De ese modo F se completa unívocamente hasta una figura de ancho constante d.

Supongamos ahora, que F^* no es una figura de ancho constante d. Entonces, se puede trazar dos rectas de apoyo paralelas l, l' de la figura F^* la distancia entre las cuales es menor que d (fig. 56). Sea M el punto en el que la recta

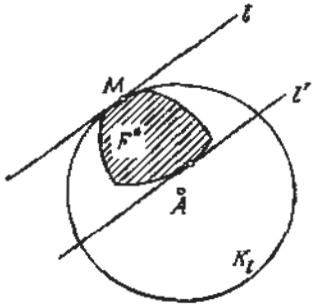


FIG. 56

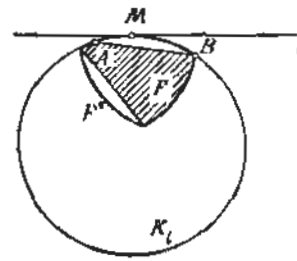


FIG. 57

l hace contacto con la figura F^*. Designemos por K_l a un círculo de radio d, que hace contacto con la recta l en el punto M y que está situado por el mismo lado de la recta

l que la figura F^*. En virtud del lema 3 el círculo K_l contiene la figura F^*. Es evidente que el centro A del círculo K_l no pertenece a la figura F^* (ya que esta última está situada en la banda entre las rectas l, l', mientras que el centro A está dispuesto fuera de dicha banda). Pero en tal caso, en virtud del lema 5, la figura F se completa no unívocamente hasta otra figura de ancho constante d.

Lema 8. *Si al cumplir las condiciones del lema 3, el punto M no pertenece a la figura F, pueden ser hallados tales dos puntos A, B de dicha figura situados en la circunferencia del círculo K_l, que el arco AB de dicha circunferencia (menor que semicircunferencia) contiene al punto M* (fig. 57).

Demostración. Designemos por N a un punto del círculo K_l, diametralmente opuesto al punto M. Para simplificar el lenguaje, pongámonos de acuerdo considerar la recta l "horizontal" y que el círculo K_l se encuentra "debajo" do dicha recta l (fig. 57). Si la semicircunferencia izquierda determinada por los puntos M y N, no contuviera ningún punto de la figura F, se podría desplazar el círculo K_l a la derecha e incluso entonces, el círculo desplazado K' contendría la figura F (y por lo tanto, la figura F^*). Pero en tal caso, la figura F^* estaría en la intersección de los círculos K_l y K' y la recta l no podría ser de apoyo de la figura F^* (fig. 58). Este razonamiento muestra que la semicircunferencia izquierda contiene el punto A (por lo menos, uno) de la figura F (fig. 57). Análogamente, la semicircunferencia derecha contiene el punto B de la figura F. Luego, ya que los puntos A, B, M pertenecen a la figura F^*, $AM \leqslant d$, $BM \leqslant d$ y por lo tanto, aquél de los dos arcos, determinados por los puntos A y B en la circunferencia del círculo K_l, que contiene el punto M, será menor que la semicircunferencia (es incluso menor que la sexta parte de la circunferencia, ya que $AB \leqslant d$).

Lema 9. *Si la figura F tiene un diámetro menor que d, su d-extensión F^* también tiene un diámetro menor que d.*

Demostración. Designemos por d' el diámetro de la figura F, pero de tal modo que $d' < d$. Seguidamente, llamemos F' a la d'-extensión de la figura F, mientras que a su d-extensión seguimos llamándola F^*. Supongamos que el punto M del plano no pertenece a la figura F', es decir, existe un círculo K' de radio d' que contiene la figura F, pero no

contiene el punto M. Designemos por A al punto del círculo K' más cercano a M (fig. 59) y tracemos un círculo K de radio d que contiene el círculo K' y que hace contacto con el último por su interior en el punto A. Es evidente, que el círculo K tampoco contiene el punto M (pero contiene la figura F), de lo que se desprende que M no pertenece a la figura F^*. O sea, que si el punto M no pertenece a la figura

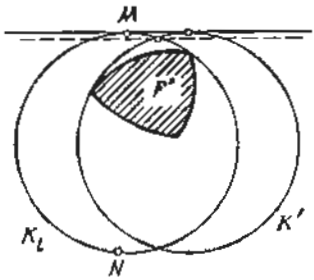


FIG. 58

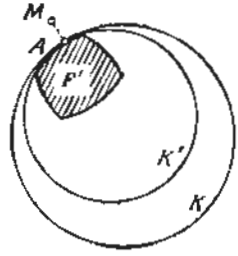


FIG. 59

F', tampoco pertenece a la figura F^* y por lo tanto, F^* está situada por completo en la figura F'. Pero la d'-extensión F' de la figura F de diámetro d', en virtud del lema 2 tiene un diámetro d'. Por consiguiente, el diámetro de la figura F^* no es más de d', es decir, es menor que d.

Demostración del teorema 3. Sea F una figura de diámetro d que se completa *no unívocamente* hasta otra figura de ancho constante d. Demostremos, que $a(F)=2$. En efecto, supongamos qne Φ_1 y Φ_2, son dos distintas figuras de ancho constante d que contienen F. Está claro, que se puede hallar un punto límite A de la figura Φ_1 que se encuentre *dentro* de la figura Φ_2. Por el punto A podemos trazar una recta de apoyo l_1 de la figura Φ_1. Sea l_2 la segunda recta de apoyo de la figura Φ_1, paralela a l_1 y B, el punto de encuentro de dicha recta con la figura Φ_1 (fig. 60). En tal caso, la recta AB es perpendicular a las rectas l_1, l_2. Demostremos que la recta AB divide la figura F en dos partes y que cada una de ellas tiene un diámetro menor que d.

Admitamos, por el contrario, que cualquiera de estas partes tiene un diámetro igual a d, es decir, por un lado

de la recta AB se encuentran los puntos C, D de la figura F que están uno del otro a una distancia igual a d. Entonces, los segmentos AB y CD son *diámetros* de la figura Φ_1 de ancho constante (recordemos que la figura Φ_1 contiene la figura F) y por lo tanto, los segmentos AB y CD deben intersecarse en un punto que es interior para los segmentos AB y CD, o tener un punto extremo común. La primera suposición es imposible, ya que los puntos C, D se sitúan

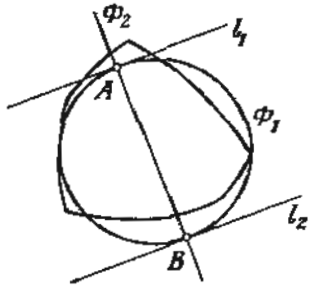


FIG. 60

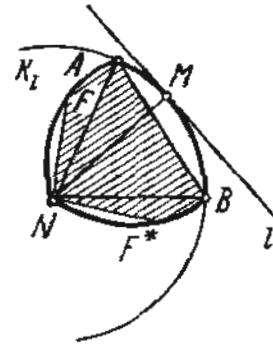


FIG. 61

por un mismo lado de la recta AB. Por consiguiente, los segmentos AB y CD deben tener un punto extremo común. Pero el punto B se encuentra fuera de la figura Φ_2 (ya que A está *dentro* de dicha figura y $AB=d$) y esto significa que también, fuera de la figura F mientras que los puntos C, D pertenecen a dicha figura. Por lo tanto, el punto B no puede ser punto extremo común de los segmentos AB y CD. En resumen, el punto A situado *dentro* de la figura Φ_2, está alejado de cualquier punto de Φ_2 a *menos* que d y por esta razón no puede coincidir con el extremo del segmento CD, situado en Φ_2 y que tiene una longitud igual a d.

La contradicción que hemos obtenido, nos demuestra que cada una de las partes en las que la recta AB divide la figura F, tiene un diámetro menor que d y por lo tanto $a(F)=2$.

Supongamos a continuación que la figura F de diámetro d se completa *unívocamente* hasta otra figura de ancho cons-

tante d. Mostremos que en este caso $a(F)=3$. Admitamos, por el contrario, que $a(F)=2$, o sea, que podremos representar F como el conjunto de dos figuras Q_1, Q_2, ambas con diámetros menores que d. Ya que F se completa unívocamente hasta otra figura de ancho constante d, F^* también es una figura de ancho constante d (lema 7). Designemos por Q_1^* y Q_2^* la d-extensión de las figuras Q_1 y Q_2. En virtud del lema 9, cada una de las figuras Q_1^* y Q_2^* tiene un diámetro menor que d.

Designemos por Γ el contorno de la figura F^*. Sea M un punto arbitrario de la curva Γ. Si el punto M pertenece a la figura F, es evidente que M se encuentra en el conjunto de las figuras Q_1 y Q_2 y, además, sin duda se encuentra en el conjunto de las figuras Q_1^* y Q_2^*. Supongamos ahora, que el punto M no pertenece al conjunto F. Tracemos una recta de apoyo l de la figura F^* que pasa por el punto M y un círculo K_l de radio d que hace contacto con la recta l en el punto M y está situado por el mismo lado de la recta l que la figura F^* (fig. 61). El centro N de dicho círculo pertenece a la figura F^* (ya que $MN \perp l$ y $MN=d$, es decir, MN es el diámetro de la figura F^* de ancho constante d). Ya que el punto M no pertenece a la figura F, según el lema 8, se encontrarán dos puntos A, B de la figura F situados en la circunferencia del círculo K_l y que en ella forman el arco AB (menor que semicircunferencia) que contiene el punto M. De esta forma $AN=BN=d$, o sea, AN y BN son diámetros de la figura F^* de ancho constante d. De aquí se deduce que N es un punto *anguloso* de la curva Γ y que el arco AB pertenece por completo a dicha curva, ya que M es un punto regular (no anguloso) de la curva Γ. En virtud de lo dicho, está claro que el punto N *debe* pertenecer a la figura F (pues en caso contrario, cambiando los "papeles" de M y N, podríamos mediante un razonamiento análogo obtener que M es un punto anguloso y N no anguloso de la curva Γ).

Debido a que el punto N pertenece a la figura F, deberá estar situado, por lo menos, en una de las figuras Q_1, Q_2. Para mayor certeza, supongamos que el punto N pertenece a la figura Q_1. Ya que $AN=BN=d$ y el conjunto Q_1 tiene un diámetro *menor* que d, los puntos A, B no pertenecen al conjunto Q_1. Pero como ambos puntos pertenecen a la figu-

ra F, tanto A como B, están situados en la figura Q_2. El arco AB de radio d que contiene el punto M, pertenecerá, evidentemente, a cualquier círculo de radio d, que contiene los puntos A y B. En particular, dicho arco pertenece a cualquier círculo de radio d que contiene a la figura Q_2. De aquí se deriva que el punto M pertenece a la figura Q_2^*. Análogamente, si N pertenece a la figura Q_2, M pertenece a la figura Q_1^*. De ese modo, en todo caso, el punto M pertenece al conjunto de las figuras Q_1^* y Q_2^*.

Pues bien, todo punto M de la línea Γ (que pertenece o no a la figura F), se encuentra en el conjunto de las figuras Q_1^* y Q_2^*, es decir, la línea Γ puede ser dividida en dos partes, cada una de las cuales tiene un diámetro menor que d. Pero esto no es posible, ya que Γ es el contorno de una figura de ancho constante (véase la pág. 28). La contradicción obtenida, finaliza la demostración del teorema 3[11].

En conclusión señalemos que en virtud del lema 7, el teorema demostrado puede ser formulado de la siguiente forma:

Sea F una figura de diámetro d; la igualdad $a(F)=3$ será válida cuando y sólo cuando F^* es una figura de ancho constante d.

Señalemos también el siguiente interesante hecho:

Para toda figura plana F de diámetro d tiene lugar la igualdad $a(F)=a(F^*)$.

En efecto, si $a(F)=2$, existen dos diferentes figuras Φ_1, Φ_2 de ancho constante d que contienen la figura F. Entonces, en virtud del lema 6, la figura F^* se contiene en cada una de las figuras Φ_1, Φ_2, es decir, la figura F^* se completa también no unívocamente hasta otra figura de ancho constante d. Por consiguiente, $a(F^*)=2$, es decir, $a(F^*)=a(F)$. Pero si $a(F)=3$, entonces, sin duda, $a(F^*)=3$.

CAPÍTULO II

DIVISIÓN DE FIGURAS EN EL PLANO DE MINKOWSKI

§ 8. EJEMPLO EVIDENTE

Si como unidad de longitud se ha tomado el segmento LM, la *longitud* de un segmento arbitrario AB se determina como un número igual a la razón $AB : LM$. La longitud del segmento AB sólo depende de su *magnitud* y no depende en absoluto de su *dirección* y disposición. Sin embargo, en ciertos problemas, surge la necesidad de dar otra definición de la longitud del segmento, en la que ésta tanto depende de su *magnitud* como de su *sentido*. Para determinar la longitud desde este punto de vista, hay que prefijar por separado la unidad de longitud para cada dirección. Una interesante definición de este género, fue propuesta a finales del siglo XIX por el conocido matemático alemán G. Minkowski. Dicha definición, se examina en el presente párrafo. Para aclarar su carácter, estudiemos primeramente un ejemplo evidente.

Supongamos que nos encontramos en una gran ciudad M. En el plano de esta ciudad, la mitad de las calles están trazadas verticalmente por todo su territorio, mientras que la otra mitad, horizontalmente (fig. 62). Alguien (una persona), desea ir (a pie o en automóvil) desde el punto A de dicha ciudad, al B. ¿Cuál es en su imaginación la "distancia" entre estos dos puntos?

Sin duda alguna, teniendo el plano de la ciudad, es posible trazar con una regla el segmento AB y medir su longitud. Sin embargo, en nuestra ciudad, tal distancia podría ser sólo imaginaria, ya que para desplazarse por el segmento AB sería necesario pasar a través de las paredes de las casas*). Conviene considerar como la distancia real

*) Suponemos que nuestro "Alguien" no posee la capacidad del personaje principal de la película "El hombre que pasa a través de las paredes".

entre los puntos A y B la longitud de la quebrada ACB, que se muestra en la fig. 63. Además de ACB, hay una serie de otros caminos reales desde A hasta B de esta misma longitud (fig. 64), pero caminos más cortos no hay.

FIG. 62

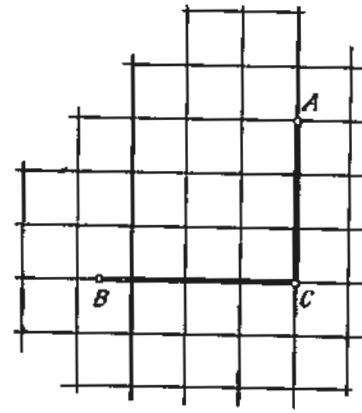


FIG. 63

Si en el plano de la ciudad se introduce un sistema de coordenadas, cuyos ejes se tracen a lo largo de dos calles recíprocamente perpendiculares, en virtud de lo dicho anteriormente, está claro que la distancia real entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ de nuestra ciudad M (o sea, la longitud del "segmento" AB en la geometría de dicha ciudad), es igual a

$$\text{lon.}_M AB = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \qquad (*)$$

(fig. 65). Al aprender a determinar la "distancia" entre dos puntos de la ciudad M, se puede plantear el problema de encontrar en ella un círculo unidad, o sea, conjuntos de todos aquellos puntos que se encuentran a una "distancia", desde el origen de coordenadas O, que no sobrepase a la unidad. Ya que el punto O tiene coordenadas (0,0), se-

gún la fórmula (*), la distancia desde el punto O hasta el punto $C(x, y)$, será igual a

$$\text{lon.}_M OC = |x + y|.$$

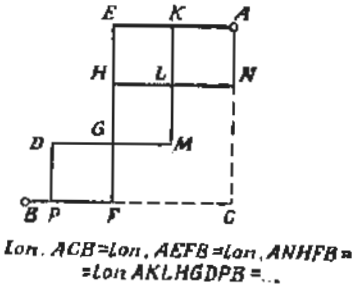


FIG. 64

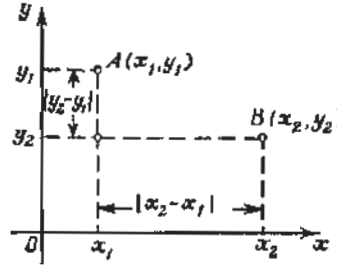


FIG. 65

Por consiguiente, en esta ciudad el "círculo unidad" se determinará por la desigualdad

$$|x| + |y| \leqslant 1.$$

Ahora es claro que en el plano de esta ciudad el indicado círculo unidad se representa por un *cuadrado* (fig. 66).

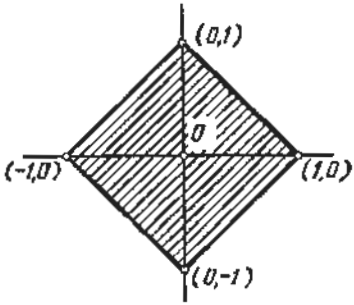


FIG. 66

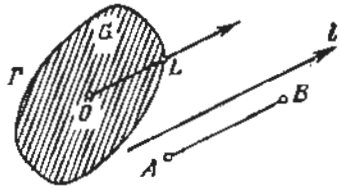


FIG. 67

Haciendo uso de dicho círculo unidad, podemos ya determinar las distancias entre dos puntos cualesquiera, de la forma que se ha indicado al principio del presente párrafo.

Precisamente, si se dan dos puntos arbitrarios A y B, hallaremos en el contorno del "círculo unidad" tal punto C debido a lo que $OC \parallel AB$ y entonces, la longitud del segmento AB será igual a la razón $AB : OC$.

Esta idea, es decir, considerar como círculo unidad cierta figura convexa centrosimétrica, es la base de la geometría de Minkowski en el plano*).

§ 9.
PLANO DE MINKOWSKI

Sea G una figura acotada plana convexa, simétrica con respecto a cierto punto O (fig. 67). Designemos por Γ la curva que limita la figura G. Supongamos que la unidad de longitud que corresponde a la dirección l, es el segmento OL del rayo paralelo a dicha dirección desde el punto O hasta el punto L de intersección de este rayo con la línea Γ. La longitud del segmento AB con respecto al nuevo sistema de escalas, se determina en este caso por la razón $AB : OL$ donde OL es la unidad de longitud paralela a la dirección l, que se determina por el vector $\overrightarrow{AB}$. (En el caso, en que el punto A coincide con el punto B, es natural considerar, que la longitud de AB es igual a cero). En lo sucesivo, la longitud del segmento AB respecto al sistema de escalas, creado por la figura G, la designaremos con el símbolo $\text{lon.}_G AB$. Es evidente que $\text{lon.}_G OM = 1$ en aquel caso y sólo en aquel caso, cuando el punto M se encuentra en la curva Γ. Si dicho punto está situado en el interior de la figura G, entonces $\text{lon.}_G OM < 1$ y por el contrario, si el punto M está fuera de G, $\text{lon.}_G OM > 1$.

Señalemos que si la figura G coincide con el círculo, llegaremos a una definición habitual, en la que la longitud del segmento depende sólo de su magnitud, pero no de su

*) Sobre otros métodos de medición de las distancias (y además, a qué llamamos distancia en sentido matemático general), el lector puede leer el libro de *Y. A. Shreider* ¿Qué es la distancia? (Serie "Lecciones populares de matemáticas", publicación 38, "Fismatguis", 1963).

dirección, mientras que si G es un cuadrado (fig. 66), llegaremos a la definición de la longitud examinada en el párrafo precedente.

Indiquemos a continuación, las propiedades principales de la nueva definición de la longitud. Como ya sabemos,

$$\text{lon.}_G AB \geqslant 0,$$

teniendo en cuenta que el signo de igualdad en esta relación tiene lugar únicamente cuando los puntos A y B coinciden. Además, de la simetría central de la figura G se deduce la igualdad

$$\text{lon.}_G AB = \text{lon.}_G BA.$$

Y por último, si AB y CD son segmentos paralelos y además, $AB : CD = k$, entonces

$$\text{lon.}_G AB = k \cdot \text{lon.}_G CD.$$

Hasta el momento, no hemos hecho uso de la convexidad de la figura G. Resulta que la convexidad de la figura G asegura la validez de una de las más importantes propiedades de la nueva longitud:

Desigualdad del triángulo. *En todo triángulo ABC, la longitud de uno de sus lados (respecto a las escalas determinadas por la figura G) no es mayor que la suma de las longitudes de dos otros lados.*

Demostración. Supongamos, que

$$\text{lon.}_G BC = a, \ \text{lon.}_G AC = b, \ \text{lon.}_G AB = c.$$

A continuación, tracemos en la figura G los "radios" OP y OQ en la misma dirección que los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$ (fig. 68). Luego tomemos en el segmento OP un punto M tal, que $OM : MP = a : b$ y tracemos en el triángulo OPQ el segmento $MN \parallel OQ$. Obtendremos (teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos OPQ y MPN)

$$\text{lon.}_G OM = OM : OP = \frac{a}{a+b},$$

$$\text{lon.}_G MN = MN : OQ = MP : OP = \frac{a}{a+b},$$

Por consiguiente,

$$BC : OM = \text{lon.}_G BC : \text{lon.}_G OM = a : \frac{a}{a+b} = a + b,$$

$$CA : MN = \text{lon.}_G CA : \text{lon.}_G MN = b : \frac{b}{a+b} = a + b.$$

De ese modo, $BC : OM = CA : MN$; además, $\angle BCA = \angle OMN$. De aquí resulta que los triángulos BCA y OMN son semejantes y por esta razón, $AB \parallel ON$ y $AB : ON = a+b$, o sea, que $\text{lon.}_G AB : \text{lon.}_G ON = a+b$. Así,

$$\text{lon.}_G ON = \frac{\text{lon.}_G AB}{a+b} = \frac{c}{a+b}.$$

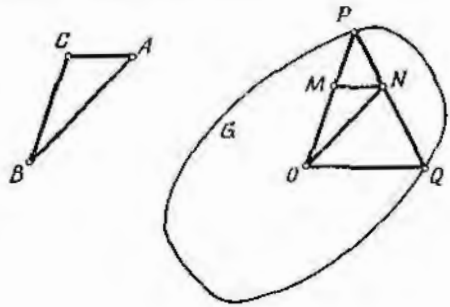


FIG. 68

Pero los puntos P y Q pertenecen a la figura G. En virtud de la *convexidad* de dicha figura, todo el segmento PQ pertenece a ella y en particular, el punto N pertenece a la figura G. De aquí se desprende que la longitud $\text{lon.}_G ON \leqslant 1$, es decir, $\frac{c}{a+b} \leqslant 1$ o bien, finalmente, $c \leqslant a+b$. Esto significa que

$$\text{lon.}_G AB \leqslant \text{lon.}_G BC + \text{lon.}_G AC.$$

El plano, en el que las escalas de longitudes se dan por medio de cierta figura convexa centrosimétrica G, se le llama *plano de Minkowski*. La propia figura G, se la llama *círculo unidad* del plano de Minkowski.

Sea r cierto número y C, un punto arbitrario del plano de Minkowski. El conjunto de puntos A, alejados del punto C a una distancia menor que r, es decir, que satisfacen la condición $\text{lon.}_G CA \leqslant r$, se llama en la geometría de Minkowski *círculo de radio r*. Señalemos que si dos puntos A y B pertenecen a un mismo círculo de radio r, entonces la distancia entre ellos no será más de $2r$; en realidad, si C

es el centro de este círculo, en virutd de la desigualdad del triángulo,

$$\text{lon.}_G AB \leqslant \text{lon.}_G AC + \text{lon.}_G BC \leqslant r + r = 2r.$$

Para que podamos imaginarnos claramente como se representa un círculo en el plano de Minkowski, recordemos la definición de la *homotecia*. Sea F cierta figura plana. Tomemos en el plano un punto arbitrario O y además, un número positivo k. Para todo punto A de la figura F, encontremos en el radio OA un punto A' tal que $OA' : OA = k$ (fig. 69). El conjunto de los puntos A' obtenidos de dicha

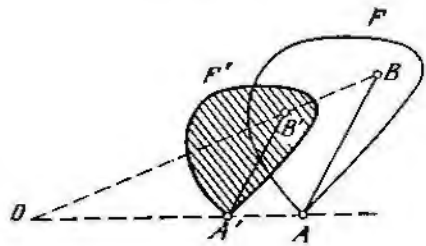


FIG. 69

manera, representará una nueva figura F'. El paso de la figura F a la figura F' se llama *homotecia* con centro O y coeficiente k y la propia figura F' se llama *homotécica* respecto a la figura F. Si F es una figura convexa, también lo será la figura F' homotécica a ella (y si el segmento AB pertenece por completo a la figura F, el segmento $A'B'$ pertenece por completo a la figura F').

Señalemos que si el coeficiente de homotecia k es menor que la unidad, la figura F' (que es homotécica a F con coeficiente k), será una "copia reducida" de F y si $k>1$, será una "copia ampliada".

Ahora, ya podemos formular la siguiente afirmación que nos da la descripción de todos los círculos en el plano de Minkowski: *cierta figura es en el plano de Minkowski un círculo de radio $r \neq 1$, cuando y sólo cuando ella es homotécica a un círculo unidad G con coeficiente de homotecia*

igual a r. Esta afirmación se demuestra fácilmente y por lo tanto la dejamos en manos de nuestros lectores.

Sea F cierta figura en el plano de Minkowski y G, su círculo unidad. Igual que en la geometría corriente, llamaremos *diámetro* de F (véase la pag. 9) a la máxima de las distancias entre los puntos de dicha figura, o sea, al mayor de los números $\text{lon.}_G AB$, donde A y B son puntos arbitrarios de la figura F (compárese con la nota [12]).

Es fácil comprender que si el diámetro de la figura F no es mayor que d, el círculo K_A de radio d con centro en el punto arbitrario A de la figura F, contiene por completo toda esta figura (fig. 70). Y por el contrario, si todo círcu-

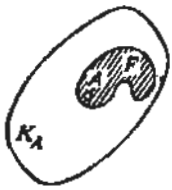


FIG. 70

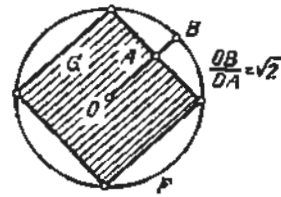


FIG. 71

lo tal contiene la figura F, el diámetro de ésta no supera a d.

Como ejemplo, examinemos un plano de Minkowski, en el que como círculo unidad sirve el cuadrado que se representa en la fig. 66. Es fácil comprender, que el círculo "corriente" circunscrito a su alrededor (y que se determina por la desigualdad $x^2+y^2\leqslant 1$ y que, por consiguiente, en la geometría corriente tiene un diámetro igual a 2), posee en la geometría de Minkowski un diámetro igual a $2\sqrt{2}$ (fig. 71).

Sea l cierta recta y A un punto que no está situado en ella. Examinando los círculos de diferentes radios con centro en A, entre ellos se puede encontrar sólo uno para el que la recta l será de apoyo. El radio r de dicho círculo se llama *distancia* desde el punto A hasta la recta l. Tal denominación se explica porque si B es un punto arbitrario de la recta l, dicho punto o bien se encuentra fuera del círculo elegido (fig. 72) y entonces $\text{lon.}_G AB > r$, o bien

se encuentra en el contorno do dicho círculo y entonces, $\text{lon}_G AB = r$. De esta forma, la distancia desde el punto A a la recta l (como en la geometría corriente) es la *mínima* distancia desde A hasta l.

Señalemos que en la geometría de Minkowski la distancia desde el punto A hasta la recta l no se mide, hablando en general, por la perpendicular bajada del punto A a la recta l (véase la fig. 72). Además, es posible que en la recta l se halle no sólo un punto próximo al A, sino un *segmento* que conste de los puntos más cercanos (fig. 73).

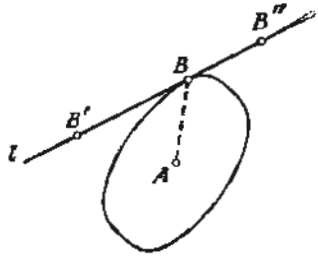


FIG. 72

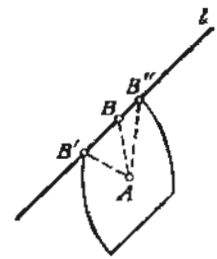


FIG. 73

Es fácil comprender que si l y m son dos rectas paralelas, la distancia desde cualquier punto A de la recta l hasta la recta m no depende en absoluto de la posición de A en la recta l (lo mismo que la distancia desde un punto arbitrario en la recta m hasta la recta l). Esta distancia se llama *distancia desde la recta l hasta la recta m*. Si, por ejemplo, l y m son dos rectas paralelas de apoyo del círculo unidad G, la distancia entre ellas es igual a dos (fig. 74).

Sea F una figura convexa arbitraria, situada en el plano de Minkowski y G, su círculo unidad y sean l y m dos rectas paralelas de apoyo de dicha figura. La distancia entre las rectas l y m se llama *ancho* de la figura F en la dirección l. El diámetro de la figura arbitraria F, es el ancho máximo de dicha figura F[12].

Tomemos, por ejemplo, en calidad de círculo unidad G, el cuadrado representado en la fig. 66 y sea F un círculo corriente, circunscrito alrededor de dicho cuadrado G. En

este caso, el ancho de la figura F en la dirección paralela al lado del cuadrado G, será igual a $2\sqrt{2}$, mientras que el ancho de la figura F en la dirección paralela a la diagonal del cuadrado G, será igual a 2. De lo dicho se deduce que en la geometría de Minkowski, el círculo no es una figura de ancho constante. Por lo general, si la figura F (en la geometría de Minkowski, con círculo unidad G) tiene en todas las direcciones un mismo ancho igual a d, entonces en dicha geometría, F es una *figura de ancho constante*. Por ejemplo, si el círculo unidad G es un hexágono regu-

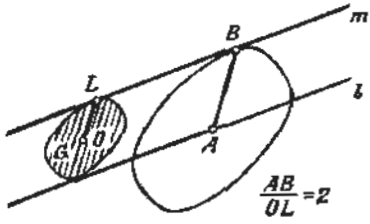


FIG. 74

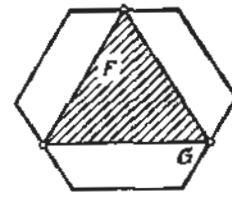


FIG. 75

lar, el triángulo equilátero representado en la fig. 75, es una figura de ancho constante.

Es interesante señalar que *toda* figura acotada convexa F que contiene puntos interiores, (es decir, no es un segmento o un punto), es una figura de ancho constante en cierta (¡y sólo en una!) de las geometrías de Minkowski [13].

De lo dicho es claro que para el caso del plano de Minkowski se difunden todas las definiciones examinadas en los §§ 4, 5 (el diámetro de la figura convexa, ancho, figuras de ancho constante, etc.). Por esta razón, es conveniente examinar en el plano de Minkowski los problemas tratados en el primer capítulo. A continuación, pasamos a examinar estos problemas.

§ 10.
EL PROBLEMA DE BORSUK EN EL PLANO DE MINKOWSKI

Sea F, una figura situada en un plano de Minkowski y designemos por G su círculo unidad. Llamemos d el diámetro de la figura F en esta geometría. Examinemos para F, un problema sobre su división en partes de menor diámetro. Designemos por $a_G(F)$ el número mínimo de partes, necesario para resolver dicho problema. Es evidente que tanto el diámetro de toda la figura, como el de sus partes por separado depende en alto grado de la geometría de Minkowski en la que se examina este diámetro, (es decir, depende del círculo unidad G). Por eso, el número $a_G(F)$ también depende esencialmente de la elección del círculo unidad G.

Por ejemplo, al determinar ordinariamente la longitud se puede dividir el paralelogramo en dos partes de menor diámetro (fig. 12, *b*). Si este paralelogramo se examina en el plano de Minkowski, en que el propio paralelogramo juega el papel de círculo unidad G, entonces, el "diámetro" de todo el paralelogramo y el de sus partes, es, evidentemente, igual a dos (en el plano de Minkowski la "longitud" de cada lado y de cada diagonal del paralelogramo G, es igual a dos). Por tal causa, en el caso a examinar, el paralelogramo G no puede ser dividido en tres partes de menor "diámetro". Sin embargo, cuatro partes serán suficientes para efectuar tal división (fig. 76).

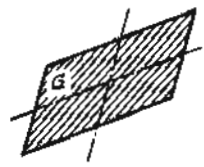


FIG. 76

En otras palabras, en este caso $a_G(G)=4$. Esto nos muestra, que para ciertas figuras F y G, puede ser válida la desigualdad $a_G(F) > a(F)$. Hay, sin embargo, casos cuando $a_G(F) < a(F)$. En efecto si G es un cuadrado y F, un círculo, es fácil advertir que $a_G(F)=2$ (fig. 77), mientras que $a(F)=3$.

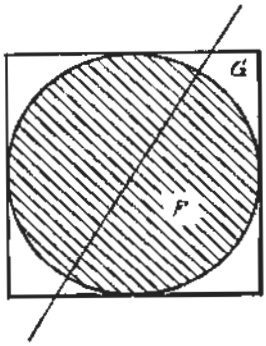


FIG. 77

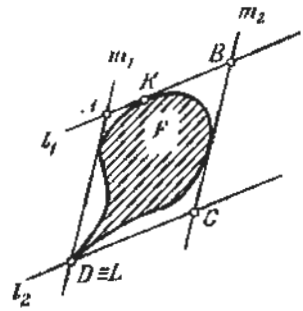


FIG. 78

El problema de la determinación de la magnitud de $a_G(F)$ fue estudiado el año 1957 por el matemático americano G. Grünbaum, al que pertenece un teorema, muy próximo al teorema 4 que más adelante formulamos.

Teorema 4. *Para cualquier figura plana acotada F es válida la relación*

$$a_G(F) \leqslant 4,$$

al mismo tiempo el signo de igualdad se obtiene únicamente en el caso cuando la cubierta convexa de la figura F es un paralelogramo homotético a G (o sea, si la figura F contiene cuatro puntos que son los vértices de un paralelogramo homotético a G, con coeficiente de homotecia $d/2$, donde d es el diámetro de la figura F).

La demostración de este teorema se da más adelanto (en el § 14).

Los resultados del § 7 también permiten hacer interesantes generalizaciones respecto a la geometría de Minkowski.

Ante todo, examinemos el caso, cuando el círculo unidad del plano de Minkowski es cierto paralelogramo G. Entonces es válido el siguiente teorema:

Teorema 5. *Sea F cierta figura de diámetro d, situada en el plano de Minkowski y cuyo círculo unidad es un paralelogramo G. La igualdad*

$$a_G(F) = 2$$

tiene lugar únicamente en el caso, si la figura F no contiene tres puntos que son los vértices de un triángulo equilátero con lado igual a d.

Claro está que aquí se trata de un triángulo equilátero en el sentido de la métrica de Minkowski que tratamos.

Demostración. Admitamos que F es una figura que contiene tres puntos A, B, C, que son los vértices de un triángulo equilátero con lado igual a d. Es evidente que ningún conjunto de un diámetro menor que d, no puede contener dos de estos puntos. De aquí se desprende que $a_G(F) \geqslant 3$.

Supongamos, a continuación, que la figura F no contiene tres puntos que son los vértices de un triángulo equilátero con lado d. Tracemos cuatro rectas de apoyo l_1, l_2, m_1, m_2 de la figura F, paralelas a los lados del paralelogramo G (fig. 78). Estas rectas forman el paralelogramo $ABCD$ que contiene la figura F. Como los lados de dicho paralelogramo son rectas de apoyo de la figura F, en cada uno de sus lados se tiene, por lo menos, un punto de dicha figura.

Sea K un punto de la figura F situado en el segmento AB y L, otro punto de esta figura en el segmento CD. Ya que los puntos K y L pertenecen a la figura F, la lon.$_G KL \leqslant d$. Por consiguiente, la distancia entre ciertos puntos de las rectas l_1 y l_2 no es mayor que d y por lo tanto, la distancia entre dichas rectas, tampoco será mayor que d. De forma análoga, se demuestra que la distancia entre las rectas m_1 y m_2, tampoco es mayor que d.

Supongamos que la distancia entre las rectas l_1 y l_2 es *menor* que d; entonces, trazando una recta m, paralela a m_1 y m_2 y que interseque el paralelogramo $ABCD$ (fig. 79), dividimos a dicho paralelogramo (y por lo tanto a la figura F) en dos partes, cada una de las cuales tiene un diámetro menor que d. Por consiguiente, en este caso $a_G(F) = 2$. Análogamente, si la distancia entre las rectas m_1 y m_2 es menor que d, $a_G(F) = 2$. Nos queda por examinar el

caso, cuando la distancia entre l_1 y l_2 y m_1 y m_2 es igual a d, o sea, cuando $\square ABCD$ es un círculo de radio $d/2$.

Supongamos, primeramente, que ninguno de los puntos A, C no pertenece a la figura F. Es fácil ver, entonces, que la recta AC divide la figura F en dos partes y que el diámetro de cada una de ellas es menor que d. Efectivamente, en este caso se puede trazar dos rectas n_1, n_2 paralelas a la diagonal BD y que cortan del paralelogramo $ABCD$ un hexágono que contiene la figura F (fig. 80).

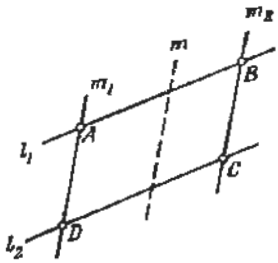


FIG. 79

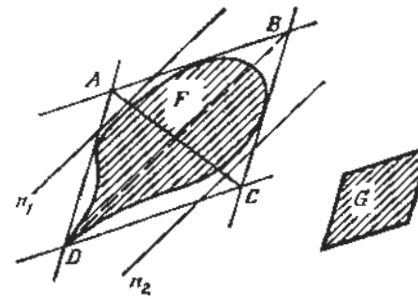


FIG. 80

La recta AC divide a dicho hexágono y, simultáneamente, a la figura F en dos partes, cada una de las cuales tiene un diámetro menor que d (fig. 81). De ese modo $a_G(F)=2$.

Se demuestra análogamente que si ninguno de los puntos B, D no pertenece a la figura F, $a_G(F)=2$.

Por último, examinemos el caso en que por lo menos uno de los puntos A, C y además, uno de los puntos B, D pertenecen a la figura F. Pero tal caso *no es* real. En verdad, supongamos que por lo menos uno de los puntos A, C (digamos, el punto A), pertenece a la figura F y que, además, también pertenece a dicha figura F, por lo menos, uno de los puntos B D (digamos, el punto B). Sea L un punto del segmento CD que pertenece a la figura F (recordemos que CD es una recta de apoyo de dicha figura). Entonces (véase la fig. 82), la

$$\text{lon.}_G AB = \text{lon.}_G AL = \text{lon.}_G BL = d,$$

es decir, ABL es un triángulo equilátero con lado d. Pero esto contradice a la suposición de que la figura F no contiene tres puntos que son los vértices de un triángulo equilátero con lado igual a d.

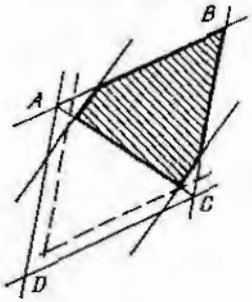


FIG. 81

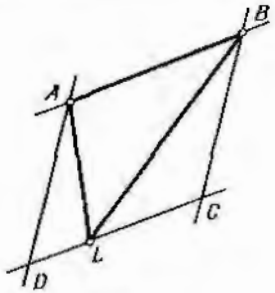


FIG. 82

Es decir, que el teorema queda demostrado.

Comparando los teoremas 4 y 5, podemos formular la siguiente afirmación que soluciona por completo el problema de hallar la magnitud $a_G(F)$, cuando G es un paralelogramo:

Si una figura F de diámetro d contiene cuatro puntos que son los vértices de un paralelogramo homotécico a G, con coeficiente de homotecia igual a $d/2$ (fig. 83), $a_G(F)=4$; *si esta condición no se cumple, pero la figura F contiene tres puntos que son los vértices de un triángulo equilátero*

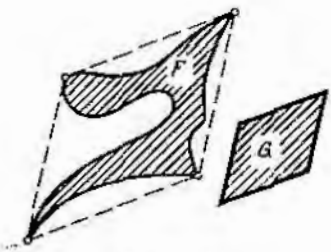


FIG. 83

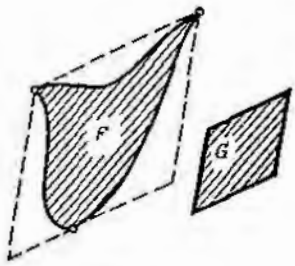


FIG. 84

con lado igual a d (fig. 84), *entonces*, $a_G(F)=3$; *en todos los demás casos*, $a_G(F)=2$.

De esta forma, el problema del cálculo completo de la magnitud $a_G(F)$ está resuelto en dos casos: en el § 7 se da la solución de dicho problema por métodos de la geometría habitual (es decir, cuando G es un círculo), mientras que en el párrafo presente, se ha expuesto la solución de este mismo problema, cuando G es un paralelogramo. En todos los demás casos, la solución de dicho problema se desconoce por los autores: sólo se sabe, (véase el teorema 4), que $2\leqslant a_G(F)\leqslant 3$. Y consideremos que es verosímil la siguiente hipótesis:

Sea F una figura de diámetro d en el plano de Minkowski con círculo unidad G que no es un paralelogramo. Para que la igualdad $a_G(F)=3$ tenga lugar, es necesario y suficiente que se cumplan las dos siguientes condicines:

1. La figura F se completa unívocamente hasta otra figura de ancho constante en la geometría de Minkowski que se examina.

2. Si F^* es la extensión de la figura F (es decir, la intersección de todos los círculos de radio d que contienen la figura F), de cada dos rectas de apoyo paralelas de la figura F^*, entre las que la distancia es igual a d, por lo menos, una de ellas tiene un punto común con la figura F.

Señalemos que si la figura G es un círculo ordinario, la segunda condición es superflua: se puede demostrar que se desprende de la primera. En el caso general, la condición 2) es necesaria, de lo que nos convenceremos gracias al siguiente ejemplo: sea F un círculo corriente y G, la figura representada en la fig. 85. Entonces, como se ve fácilmente, la figura F se completa unívocamente hasta otra figura de ancho constante (la única figura de ancho constante que contiene a F es G), o sea, que la condición 1) se cumple. La condición 2) no se cumple. Pero al mismo tiempo, $a_G(F)=2$ (véase la línea punteada en la fig. 85). De esta forma, sólo el cumplimiento de la condición 1) no es suficiente, en el caso general, para satisfacer la igualdad $a_G(F)=3$. Y esto es debido, primeramente, a que $a_G(F)$, en general, no coincide con el número $a_G(F)$ (fig. 85).

No fue anteriormente demostrado el teorema 4 que nos da la estimación de la magnitud de $a_G(F)$. Por ejemplo, de dicho teorema se desprende que para la figura $F=G$,

tienen lugar las siguientes afirmaciones: $a_G(G)=4$, si G es un paralelogramo y $a_G(G)\leqslant 3$ en todos los demás casos. Pero la igualdad $a_G(G)=2$ no es real (lo que se demuestra lo mismo que cuando G es un círculo, pág. 10). Entonces, si G no es un paralelogramo, $a_G(G)=3$.

En aquellos casos, cuando G es un círculo corriente, o paralelogramo, su división en tres y cuatro partes de menor diámetro, se muestra en las figs. 86 y 76. En estos

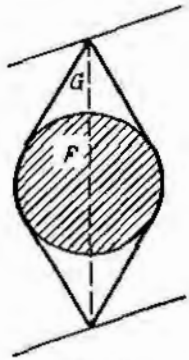


FIG. 85

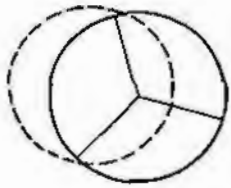


FIG. 86

casos, cada una de las partes no sólo es de menor diámetro, sino que también se cubre con un círculo de diámetro menor de acuerdo con la geometría de Minkowski. Es natural que surja la suposición de que en dicha geometría lo mismo sucederá con *todo* círculo G. En otras palabras, surge la siguiente suposición:

Toda figura convexa centrosimétrica G diferente del paralelogramo, puede ser dividida en tres partes, cada una de las cuales se cubre con una figura homotécica a G, con coeficiente de homotecia menor que la unidad (es decir, con un "círculo" de menor "diámetro").

Dicha suposición es válida en realidad no sólo para figuras centrosimétricas, sino que también para *toda* figura convexa. A la demostración de este hecho (y sobre su principio, del teorema 4) se dedica el siguiente capítulo.

CAPÍTULO III
RECUBRIMIENTO DE LAS FIGURAS CONVEXAS POR HOMOTÉCICAS

§ 11. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el presente capítulo vamos a analizar el siguiente problema. Sea dada cierta figura F plana, convexa y acotada. Se debe determinar el número mínimo de "copias reducidas" homotécicas de F con las que dicha figura puede ser cubierta por completo. Designemos este número mínimo por $b(F)$. Con mayor exactitud, la igualdad $b(F)=m$ significa que existen tales figuras F_1, F_2, ..., F_m, que son homotécicas a F con ciertos centros de homotecia y coeficientes de homotecia menores que la unidad y que en su conjunto, las figuras F_1, F_2, ..., F_m cubren la figura F por completo (fig. 87); al mismo tiempo, el número m es

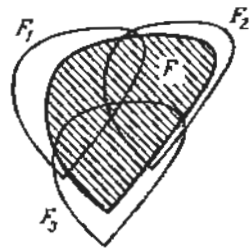


FIG. 87

mínimo, o sea, para resolver nuestro problema no es suficiente un número de figuras homotécicas menor que m.

El año 1960, I. C. Gojberg y A. S. Markus, plantearon el problema de los valores que puede tomar $b(F)$. Con cierta anterioridad, este mismo problema (pero formulado de otra forma), fue estudiado por el matemático alemán F. Levy.

Como ejemplo, examinemos el caso cuando la figura F es un círculo. Entonces, las figuras homotécicas menores son círculos arbitrarios de menor diámetro. Es fácil comprender que con dos círculos tales no es posible cubrir el círculo inicial F, es decir, $b(F) \geqslant 3$. En efecto, sean F_1 y F_2 dos círculos de menor diámetro y O_1 y O_2, sus centros (fig. 88). Tracemos por el centro O del círculo inicial F

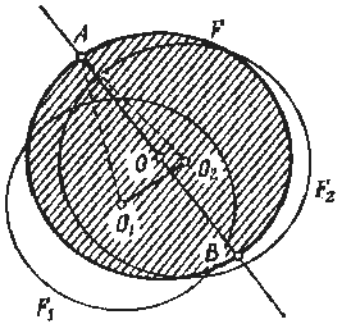


FIG. 88

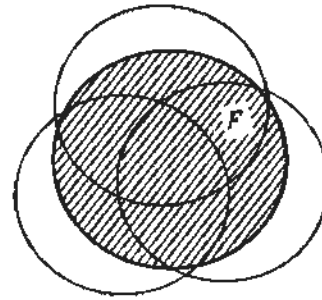


FIG. 89

una perpendicular a la línea de los centros O_1 O_2. Esta perpendicular interseca la circunferencia del círculo inicial F por dos puntos A y B. Por ejemplo, supongamos que el punto A está situado por el mismo lado de la recta O_1 O_2 que el punto O (si la recta O_1O_2 pasa por el punto O, entonces se puede tomar cualesquiera de los puntos A, B). En tal caso, $AO_1 \geqslant AO = r$, $AO_2 \geqslant AO = r$, donde r es el radio del círculo F. Como los radios de los círculos F_1 y F_2 son menores que r, el punto A no pertenece a ninguno de ellos, o sea, que los círculos F_1, F_2 no cubren totalmente el círculo F.

Por otro lado, es fácil cubrir el círculo F con tres círculos de diámetro un poco menor (fig. 89). De ese modo, si la figura es un círculo, $b(F) = 3$.

Examinemos otro caso cuando F es un paralelogramo. Es claro que ningún otro paralelogramo, homotécico a F con coeficiente de homotecia menor que la unidad, no puede contener simultáneamente *dos* vértices del paralelogramo F. En otras palabras, los cuatro vértices del paralelogra-

mo F deben pertenecer a cuatro *diferentes* paralelogramos homotécicos, es decir, que $b(F) \geqslant 4$. No obstante, cuatro figuras homotécicas son evidentemente suficientes (fig. 90). Por consiguiente, si la figura es un paralelogramo, $b(F)=4$.

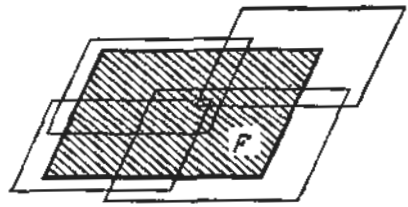


FIG. 90

§ 12.

OTRA FORMA DEL PROBLEMA

Al problema del recubrimiento de figuras con las homotécicas menores, se le puede dar otra forma que lo aproxima al problema de Borsuk para la división de figuras en partes de diámetro menor.

Sea F una figura convexa y G, cierta parte de ella. Consideraremos que la parte G de la figura F *tiene un tamaño igual a* k, si existe una figura F' homotécica a F con coeficiente k que contiene G, sin embargo, ninguna figura homotécica a F con coeficiente menor que k, no contiene por completo G[14]. Es evidente, que si una parte de G coincide con toda la figura F, su tamaño es igual a 1. Por esta razón, para cualquier parte G de la F que no coincide con la figura F, su tamaño $k \leqslant 1$. Sin embargo, no se debe pensar que si la parte G no coincide por completo con la figura F, su tamaño k obligatoriamente es *menor* que la unidad. Por ejemplo, si F es un círculo y la parte G, un triángulo acutángulo inscrito en él (fig. 91), el tamaño de la parte G es igual a la unidad (ya que ningún círculo de menor diámetro no contiene por completo el triángulo G). Si el tamaño de la parte G de la figura F $k<1$, la llamaremos *parte de menor tamaño*.

Haciendo uso de la noción del tamaño, podremos dar a la definición de la magnitud $b(F)$ otra forma: *$b(F)$ es un número mínimo de partes de menor tamaño en las que se puede dividir la figura convexa F.* Es fácil comprender, que esta definición de $b(F)$ es equivalente a la anterior. Efectivamente, sean F_1, F_2, ..., F_m figuras homotécicas

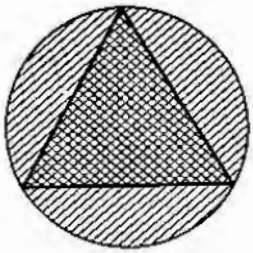


FIG. 91

menores que cubren a la figura F. Designemos por G_1, G_2, ..., G_m a las partes de la figura F que se cortan de ella por las figuras F_1, F_2, ..., F_m. Es evidente, que cada una de las partes G_1, G_2, ..., G_m de la figura F, tiene un tamaño menor que la unidad. Entonces, si la figura F puede ser cubierta por m figuras homotécicas menores, ella podrá ser dividida en m partes de tamaño menor. Y a la inversa, si la figura F puede ser dividida en m partes G_1, G_2, ..., G_m de menor tamaño, existen las figuras F_1, F_2, ..., F_m, que contienen respectivamente las partes G_1, G_2, ..., G_m y que son homotécicas a F con coeficientes menores que la unidad. Estas figuras F_1, F_2, ..., F_m, precisamente, forman el recubrimiento de la figura F con las homotécicas menores.

De esta manera, el problema del recubrimiento de una figura convexa con figuras homotécicas menores, puede ser también formulado como el *problema de la división de la figura F en partes de menor tamaño.* Esta forma, nos aproxima mucho al problema de Borsuk examinado en el capítulo I.

Sin embargo, la relación entre estos dos problemas, no es únicamente exterior. En realidad, si la figura F tiene

un diámetro d, la figura homotécica a F con coeficiente k, tiene un diámetro kd. De aquí se desprende que si la figura convexa F tiene un diámetro d, cualquiera de sus partes de menor tamaño es, simultáneamente, parte de menor diámetro. (A la inversa, esta afirmación no es válida; por ejemplo, un triángulo equilátero inscrito en el círculo F de diámetro d, es una parte de menor diámetro, pero tiene un tamaño igual a la unidad, véase la fig. 91). Por lo tanto, si una figura convexa F puede ser dividida en m partes de menor tamaño, con mayor razón puede ser dividida en m partes de menor diámetro (pero, hablando en general, no a la inversa, como vemos en el ejemplo del paralelogramo).

De esta forma, *para toda figura convexa F, es válida la desigualdad*

$$a(F) \leqslant b(F).$$

Señalemos que el problema de la división en partes de menor tamaño sólo se refiere a las figuras *convexas*, mientras que el problema de Borsuk de la división en partes de menor diámetro, fue planteado para figuras de *todo tipo* (incluso no convexas).

§ 13.
SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL RECUBRIMIENTO DE FIGURAS

Como hemos visto en el § 11, en el problema del recubrimiento de una figura convexa con figuras homotécicas menores (en diferencia del problema de Borsuk), el círculo no es la figura que exige para su recubrimiento el máximo número de figuras: para el paralelogramo, el número $b(F)$ alcanza un valor mayor que para el círculo.

Es natural que surge la cuestión: ¿existen figuras planas convexas, para las que la magnitud $b(F)$ adquiera un valor mayor que para el paralelogramo? Resulta que tales figuras no existen; es más, entre las figuras planas convexas *sólo* para el paralelogramo es justa la igualdad $b(F) = 4$. En otras palabras, tiene lugar el siguiente teorema,

establecido el año 1960 por I. C. Gojberg y A. S. Markus (con cierta anterioridad, en 1955, F. Levy obtuvo otro resultado del que también se desprende este teorema):

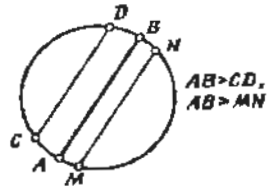


FIG. 92

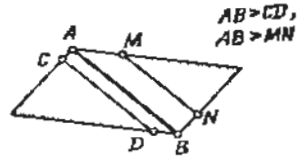


FIG. 93

Teorema 6. *Para toda figura plana, acotada y convexa, F que no es un paralelogramo, es válida la igualdad b (F)=3; si F es un paralelogramo, b (F)=4.*

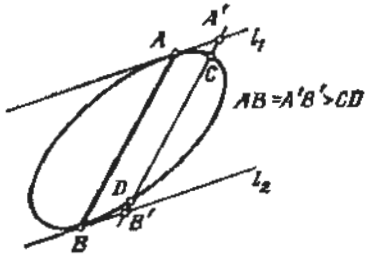


FIG. 94

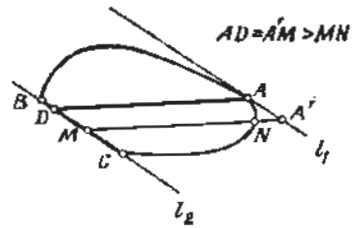


FIG. 95

Antes de pasar a la demostración del teorema 6, demos una definición y demostraremos varias proposiciones auxiliares*).

Sea F cierta figura convexa y A, B dos de sus puntos límites. Convendremos en llamar al segmento AB *cuerda mayor* de la figura F, si toda cuerda de esta figura paralela

*) En resumidas cuentas (junto con las proposiciones auxiliares) la demostración del teorema 6 ocupa 10 páginas. Más adelante (en el § 17), se dará otra demostración de dicho teorema.

a AB es de menor longitud. Por ejemplo, en el círculo, todos los diámetros y sólo ellos, pueden llamarse cuerdas mayores (fig. 92). En el paralelogramo, cuerdas mayores pueden ser sólo sus diagonales (fig. 93). Si, a continuación, llamamos l_1, l_2 a dos rectas de apoyo paralelas de la figura convexa F, cada una de éstas tiene sólo un punto común con esta figura, entonces, el segmento que une estos puntos comunes, es la cuerda mayor de la figura F (fig. 94). En el caso en que una de las rectas de apoyo paralelas l_1, l_2 tiene con la figura F un punto común A, mientras que la segunda tiene con la figura F un segmento común BC, en tal caso, el segmento que une el punto A con cualquier punto D del segmento BC, es la cuerda mayor de la figura F (fig. 95). Por último, si cada una de las rectas de apoyo l_1 y l_2 tiene con la figura F un segmento común, las dos diagonales del trapecio, cuyos vértices son los extremos de dichos segmentos, son las cuerdas mayores de la figura F (fig. 96).

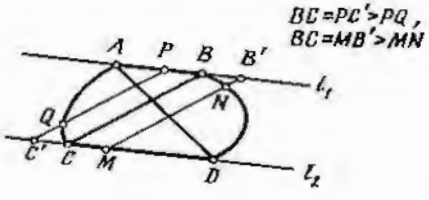


FIG. 96

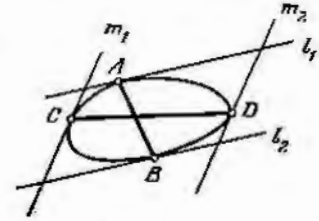


FIG. 97

En virtud de lo dicho, resulta que *si* l_1 y l_2 *son dos rectas de apoyo paralelas de la figura convexa* F, *habrá por lo menos un segmento con sus extremos situados en dichas rectas que es la cuerda mayor de la figura* F.

Teorema 7. *Toda figura convexa* F, *diferente del paralelogramo, tiene, por lo menos, tres cuerdas mayores.*

En otras palabras, el paralelogramo es la *única* figura convexa que tiene dos cuerdas mayores. El triángulo y el hexágono regular son ejemplo de figuras que tienen exactamente tres cuerdas mayores. Un $2n$-gono tiene exactamente n cuerdas mayores y el círculo, un número infinito.

Demostración del teorema 7. Supongamos, primeramente, que el contorno de la figura convexa F no tiene nin-

gún segmento rectilíneo. Tracemos dos rectas paralelas de apoyo l_1 y l_2 de la figura F y sean A, B puntos de estas dos rectas comunes con la figura F. Entonces, AB es una cuerda mayor. Sea C un punto arbitrario límite de la figura F, pero diferente de A, B. Tracemos por el punto C una recta de apoyo m_1 de la figura F y supongamos que m_2, otra recta de apoyo paralela a m_1. Designemos por D el punto común de la recta m_2 con la figura F (sin excluir la posibilidad de que este punto coincida con uno de los puntos A, B).

El segmento CD es la segunda cuerda mayor de la figura F (fig. 97). Por último, tomemos cualquier punto límite E de la figura F que no coincida con A, B, C, D. Trazando a continuación, la recta de apoyo n_1 por el punto E y seguidamente, n_2 paralela a ella, obtendremos una cuerda mayor más. De tal forma, en el caso a considerar hemos hallado tres cuerdas mayores de la figura F (por otra parte, el razonamiento expuesto nos muestra claramente que en el caso dado la figura F tiene una serie infinita de cuerdas mayores).

Supongamos ahora que el contorno de la figura F contiene, por lo menos, un segmento rectilíneo, es decir, se puede trazar una recta de apoyo l_1 de la figura F que tiene con ella un segmento común AB. Designemos por l_2 una recta de apoyo paralela a l_1. Si l_2 sólo tiene un punto C común con la figura F, todo segmento que une el punto C con cualquier punto del segmento AB, es cuerda mayor, o sea, en este caso también obtenemos una serie infinita de cuerdas mayores (fig. 98).

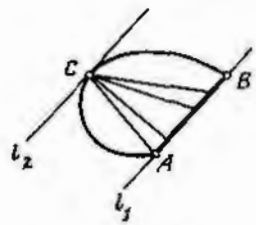


FIG. 98

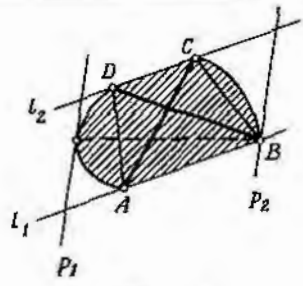


FIG. 99

Supongamos, por último, que la recta l_2 tiene con la figura F un segmento común DC. Entonces la figura convexa F deberá contener por completo el trapecio $ABCD$, teniendo, además, en cuenta que las dos diagonales de dicho trapecio son cuerdas mayores de la figura F. Si la figura F no coincide con este trapecio, es posible trazar una recta de apoyo p_1 de la figura F que no tiene puntos comunes con el trapecio $ABCD$ (fig. 99). Trazando, a continuación, una recta de apoyo p_2, paralela a p_1, obtendremos la tercera cuerda mayor (con sus extremos situados en las rectas p_1 y p_2).

Queda por examinar el caso cuando la figura F coincide con el trapecio $ABCD$. Si $AB \neq CD$, entonces el mayor de estos segmentos es la tercera cuerda mayor del trapecio $ABCD$ (es decir, de la figura F; véase la fig. 100). Si

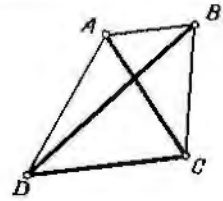


FIG. 100

$AB=CD$, F es un paralelogramo. Es evidente que el paralelogramo tiene sólo dos cuerdas mayores.

El teorema queda demostrado.

Lema 10. *Sea AB la cuerda mayor de la figura convexa F, DE, otra cuerda paralela a ella y O, un punto interior arbitrario de la figura F. Designemos por F_1 la parte de la figura F cortada por la cuerda DE y que no contiene la cuerda AB. En tal caso, existe una figura G, homotécica a F con coeficiente de homotecia menor que la unidad que contiene por completo la figura F_1 y al punto O* (fig. 101).

Demostración. Sea PQ una cuerda de la figura F paralela a las cuerdas AB y DE y que está situada entre ellas. Designemos por F' la parte de la figura F cortada por la cuerda PQ y que contiene la cuerda DE. Está claro que la

figura F' contiene por completo la figura F_1 (fig. 102). Como AB es la cuerda mayor, $AB > PQ$. Designemos por G' la figura homotécica a F con centro de homotecia en el

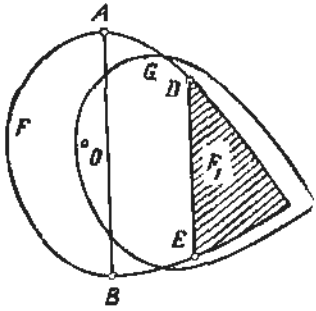


FIG. 101

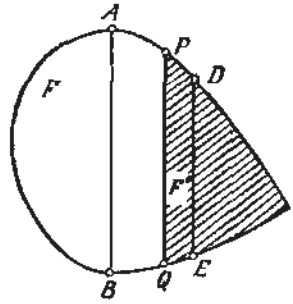


FIG. 102

punto T de intersección de las rectas AP y BQ y con coeficiente de homotecia igual a PQ/AB (fig. 103). Es evidente que con esta homotecia la cuerda AB de la figura F se convierte en la cuerda PQ de la figura G'.

Sea M un punto arbitrario de la figura F' que no está situado en la cuerda PQ. Desde los puntos A y B tracemos rectas paralelas respectivamente a PM y QM y designemos por N su punto de intersección (fig. 103). El punto N

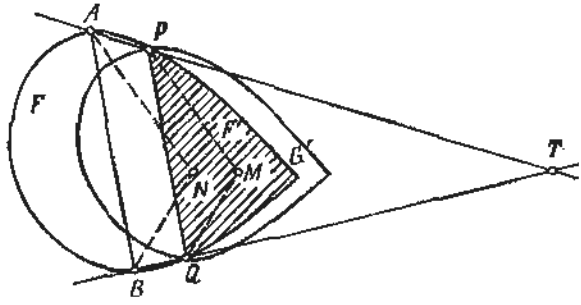


FIG. 103

pertenece a la figura F ya que al mismo tiempo pertenece al polígnno $ABQMP$ situado por completo en la figura F. Con la homotecia a considerar el punto N de la figura F pasa al punto M. De aquí se desprende que M pertenece a la figura G'. Por consiguiente, todo punto M de la figura F' pertenece a la figura G', es decir, la figura F' se cubre con la figura G'.

Así que, cualquiera que sea la cuerda PQ paralela a las cuerdas AB y DE y situada entre ellas, con la construcción realizada obtenemos la figura G' que es homotécica a F con coeficiente de homotecia menor que la unidad y que contiene por completo figura F' y por consiguiente, F_1. Queda por demostrar que eligiendo convenientemente la cuerda PQ, se puede conseguir que el punto O pertenezca a la figura G' lo que nos dará la figura G que buscamos.

Si el punto O está situado por el mismo lado de AB que la cuerda DE, es suficiente tomar en calidad de PQ la cuerda que separa O del segmento AB. En realidad, al elegir de tal modo la cuerda PQ (fig. 104), el punto O per-

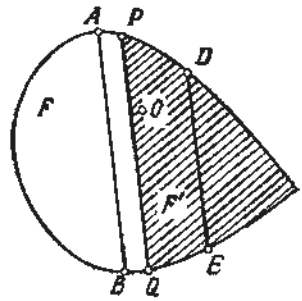


FIG. 104

tenece a la figura F' y por consiguiente, está situado en la figura G'.

Supongamos ahora, que el punto O se encuentra bien en la cuerda AB, bien por otro lado de dicha cuerda respecto al segmento DE. Si el punto O está situado en la cuerda AB, designemos por C un punto arbitrario de la figura F, situado por el lado contrario de la cuerda AB respecto al seg-

mento DE (fig. 105). Si O no está situado en el segmento AB, desde el punto arbitrario interior H del segmento AB tracemos un rayo que pasa por el punto O y tomemos C como el punto de intersección de dicho rayo con el contorno de la figura F (fig. 106). En ambos casos, el punto

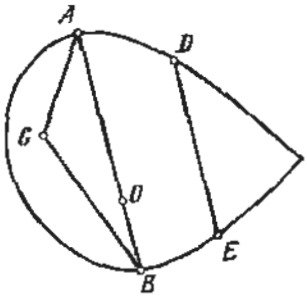


FIG. 105

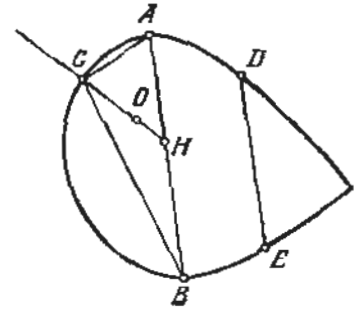


FIG. 106

O pertenece al triángulo ABC, pero no está situado en la quebrada ABC y, además, el triángulo ABC, se encuentra con relación al segmento DE por otro lado de la cuerda AB.

Tracemos desde el punto O los rayos l_1, l_2 en la dirección de los vectores $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ y designemos por K y L los puntos de intersección de estos rayos con el contorno de la figura F (fig. 107). Está claro que los puntos K y L están situados por el mismo lado de AB que el segmento DE. Elijamos ahora una cuerda $PQ \parallel AB$, pero de tal forma, que el segmento AB esté situado por un lado de la recta PQ y todos los cuatro puntos D, K, L, E, por otro.

Tracemos por los puntos P y Q rectas paralelas respectivamente a las rectas AC y CB. Designemos por S el punto de intersección de dichas rectas. Para la homotecia mencionada anteriormente con centro en el punto T y coeficiente PQ/AB, el triángulo ABC pasa al triángulo PQS. Nos queda mostrar que el punto O pertenece al triángulo PQS. Esto significará, en realidad, que el punto que pasa a O en el caso de nuestra homotecia pertenece al triángulo ABC y

por lo tanto, a la figura F, de lo que se desprende que O pertenece a G'.

En virtud de como ha sido elegida la cuerda PQ, los puntos K y L están situados en el interior del ángulo PSQ y por lo tanto, el punto O se encuentra también en el interior de este ángulo (fig. 107). Al mismo tiempo, los puntos

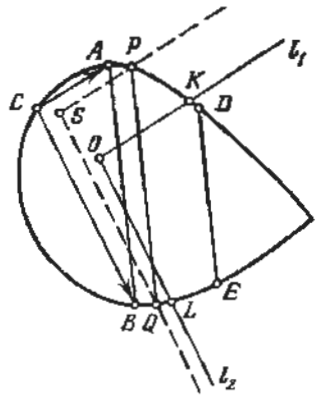


FIG. 107

O y S están situados por un mismo lado de la recta PQ. De aquí se deduce que O es un punto interior del triángulo PQS.

Lema 11. *Dos cuerdas mayores de una figura convexa F se interesecan (en el interior de F o en su contorno).*

Demostración. Sea AB la cuerda mayor de la figura F y CD, otra cuerda que no la interseca. Vamos a demostrar que CD no es una cuerda mayor. Si CD es paralela a AB, esto es evidente. Por esta razón, vamos a suponer que CD no es paralela a AB y que, para mayor claridad, el punto C está más cerca de AB que el punto D (fig. 108). Tracemos una cuerda CM paralela a AB. En tal caso, los puntos B y D se encuentran por lados opuestos de la recta CM y por lo tanto, el segmeto BD interseca la recta CM en un punto K. Debido a la convexidad de la figura F, el punto K del segmento BD pertenecerá a esta figura. Por ello, $CM \geqslant CK$. A la vez si AB es la cuerda mayor, $CM < AB$; por consi-

guiente, $CK<AB$. De aquí se desprende, que los rayos AC y BD se intersecan en cierto punto O (fig. 108). Por último, tracemos en el tetrágono $ACDB$ el segmento AL paralelo a CD. El punto L pertenece al segmento BD y por lo tanto, a la figura F. Pero de la semejanza de los triángulos CDO y ALO, se deduce que $AL>CD$. Esto significa que la recta AL corta en la figura F una cuerda de

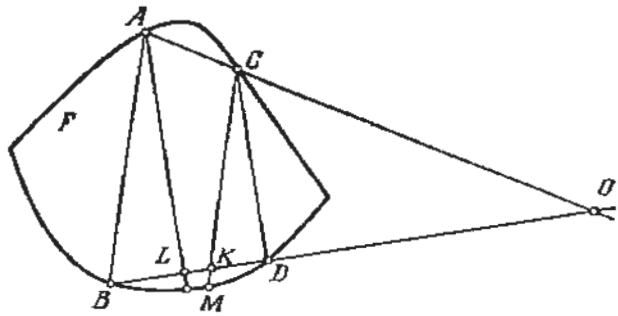


FIG. 108

mayor longitud que CD y por esta razón, CD no puede ser la cuerda mayor de dicha figura.

Demostración del teorema 6. Mostremos, primeramente, que si la figura convexa F no es un paralelogramo, $b\ (F)\leqslant 3$.

Según el teorema 7, la figura F tiene tres diferentes cuerdas mayores y además, cada dos de ellas se intersecan (lema 11). Consideremos primeramente el caso en que dos diferentes cuerdas mayores AB y AC se intersecan en el punto límite A de esta figura. Sea O un punto arbitrario interior de la figura F, situado en el interior del ángulo $\angle BAC$ (fig. 109). Tracemos por el punto O las cuerdas DE y KL, paralelas respectivamente a las cuerdas AB y AC. En virtud del lema 10, la parte de la figura F que se corta por DE y en la que no está situado el punto A, puede ser cubierta por una figura homotécica a F con coeficiente de homotecia menor que la unidad. Idéntica deducción se puede también hacer para la parte de la figura F que se corta por la cuerda KL y en la que tampoco está situado el punto A. En lo que se refiere a la parte restante de la figura F (o sea, al

"sector" curvilíneo OLD), eligiendo el punto O suficientemente cerca de A, dicha parte puede ser situada en un círculo tan pequeño como se desee con centro en el punto A. De ese modo, esta parte de la figura F puede ser cubierta por una figura homotécica a F con coeficiente de homotecia tan pequeño como se desee.

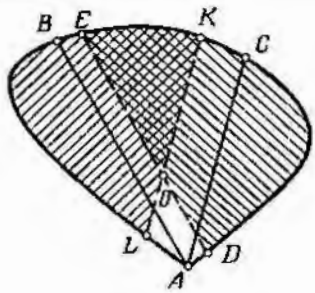


FIG. 109

Por consiguiente, queda por examinar el caso en que cada dos de las tres cuerdas mayores se intersecan en un punto interior de la figura F. Designemos por A, B, C, D, E, H los seis puntos que son los extremos de estas tres cuerdas, desplazando por la curva de derecha a la izquierda y entonces, las cuerdas que consideramos se designarán por

$$AD,\ BE \text{ y } CH.$$

Sea MN una cuerda paralela a AD y que separa la última de los puntos B y C (fig. 110). Designemos por F_1 la parte de la figura F que se corta por la cuerda MN y que no contiene AD. A continuación, tracemos la cuerda PQ paralela a BE y que separa ésta de los puntos M, A y H (fig. 111). Designemos por F_2 la parte de la figura F que se corta por la cuerda PQ y que no contiene a BE. Por último, tracemos la cuerda ST paralela a CH y que separa ésta de los puntos N y Q (fig. 112). Esta cuerda separa de la figura F la figura F_3 (que no contiene CH).

Ahora supongamos que O es un punto interior arbitrario de la figura F. En virtud del lema 10, existe una figura G_j ($j=1, 2, 3$), homotécica a F con coeficiente de ho-

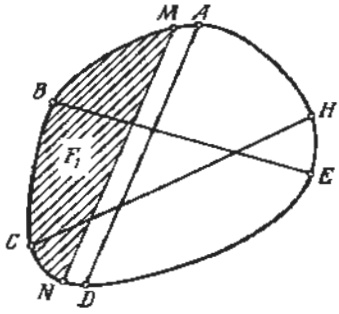


FIG. 110

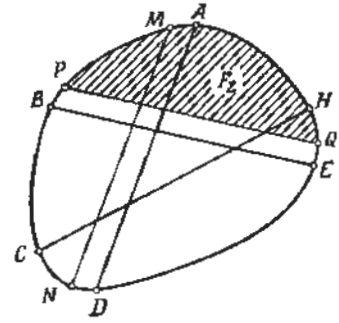


FIG. 111

motecia menor que la unidad y que contiene la figura F_i y el punto O. Por consiguiente, G_1 contiene el "sector" que en F corta la quebrada MON (fig. 113) mientras que las

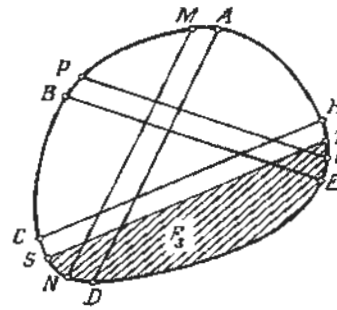


FIG. 112

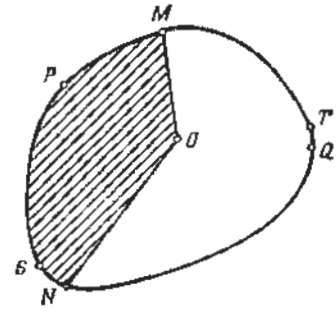


FIG. 113

figuras G_2 y G_3 contienen sectores análogos POQ y SOT (fig. 114, 115). Estos tres sectores y más aún, las figuras G_1, G_2, G_3 cubren toda la figura F.

De ese manera, en este caso también

$$b(F) \leqslant 3.$$

Mostremos, por último, que para toda figura convexa F, $b(F) \geqslant 3$. Sean F_1, F_2 dos figuras arbitrarias homotéci-

cas a F con coeficiente de homotecia menor que la unidad y O_1, O_2, los correspondientes centros de homotecia. Tracemos la recta l que pasa por O_1 y O_2 y sea M el punto de

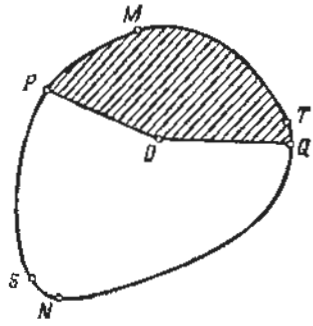


FIG. 114

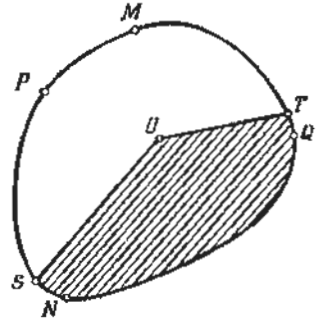


FIG. 115

la figura F más alejado de la recta l. En este caso, todos los puntos de la figura F_1 están situados de l a una distancia menor que el punto M (fig. 116), lo que es también válido

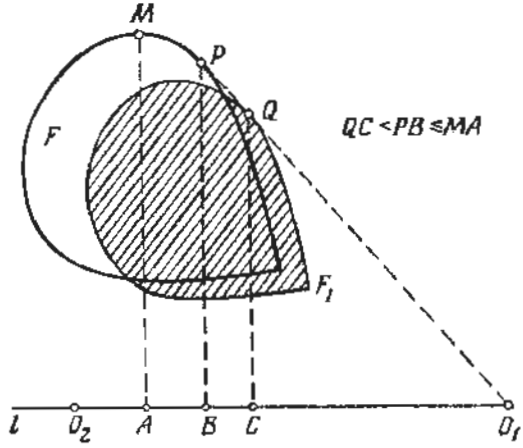


FIG. 116

para la figura F_2. Por consiguiente, el punto M no se cubre por ninguna de las dos figuras F_1 y F_2, de lo que se desprende que $b(F) > 2$.

Es decir, si la figura F no es un paralelogramo, $b(F) = 3$. Es evidente que para el paralelogramo, $b(F) = 4$.

El teorema queda demostrado.

§ 14.
DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4

Comencemos ahora la demostración del teorema 4.

Ante todo, consideremos el caso cuando la figura F es convexa. Señalemos que la desigualdad $a(F) \leqslant b(F)$ se satisface incluso en el caso del plano de Minkowski:

$$a_G(F) \leqslant b(F).$$

Esto se demuestra de mismo modo que en la geometría habitual (pág. 67). Por consiguiente, si la figura F no es un paralelogramo, en virtud del teorema 6, $a_G(F) \leqslant b(F) = 3$.

Sea ahora F un paralelogramo. Tracemos por el centro O de la figura G dos rectas paralelas a las diagonales del paralelogramo F y designemos por $A_1 C_1$ y $B_2 D_2$ los segmentos que se cortan por la figura G en dichas rectas. En los segmentos $A_1 C_1$ y $B_2 D_2$, como en diagonales, construimos dos paralelogramos con lados paralelos a los del paralelogramo F (fig. 117). Designemos por F' el menor de os-

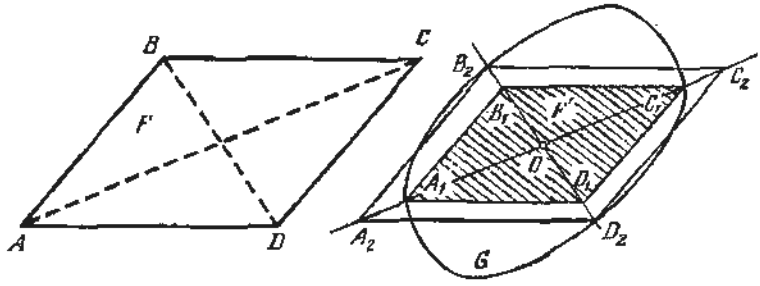


FIG. 117

tos dos paralelogramos; sea éste, el paralelogramo $A_1 B_1 C_1 D_1$ con diagonal $A_1 C_1$. Como los paralelogramos F y F' son homotécicos, entonces $a_G(F) = a_G(F')$ y por esto, en nuestros posteriores razonamientos podemos considerar F' en lugar del paralelogramo F.

Está claro que la $\text{lon.}_G A_1 C_1 = 2$ y por consiguiente, el diámetro del paralelogramo F' no es menor que dos. (Aquí y en adelante consideramos los "diámetros" con respecto a las longitudes que se determinan por la figura G). Sin embargo, el diámetro del paralelogramo F' no es mayor que dos, ya que F' está situado por completo en la figura G, cuyo diámetro es igual a 2.

Así, el diámetro del paralelogramo F' es igual a dos.

Ahora tracemos por el punto O una recta p paralela a los lados $A_1 B_1$ y $C_1 D_1$ y designemos por M y N sus puntos de intersección con el contorno de la figura G. Si los puntos M y N no se encuentran en los lados $B_1 C_1$ y $A_1 D_1$ del paralelogramo F' (fig. 118), el hexágono $A_1 B_1$,

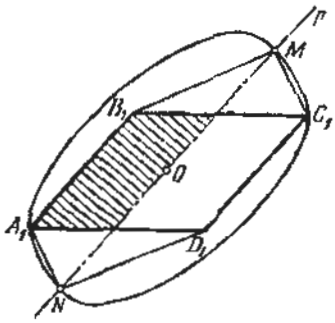


FIG. 118

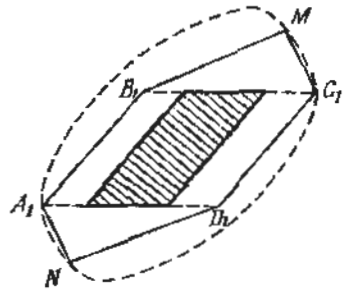


FIG. 119

$M C_1 D_1 N$ está situado en la figura G. De aquí se desprende fácilmente que el diámetro de cada una de las "mitades" en las que la recta p divide al paralelogramo F', es menos de dos (fig. 119) así que $a_G(F') = 2$. Por el contrario, si los puntos M y N están situados en los lados del paralelogramo F', las rectas $B_1 C_1$ y $A_1 D_1$ deben ser rectas *de apoyo* de la figura G (ya que por el punto límite M de la

figura G debe pasar una recta de apoyo mientras que toda recta diferente de $B_1 C_1$, corta el paralelogramo F' y por lo tanto, la figura G). De ese modo (fig. 120), toda la figura G se encuentra en la banda situada entre las rectas $B_1 C_1$ y $A_1 D_1$.

Así, o bien $a_G(F')=2$, o bien la figura G está situada en la banda entre las rectas $B_1 C_1$ y $A_1 D_1$.

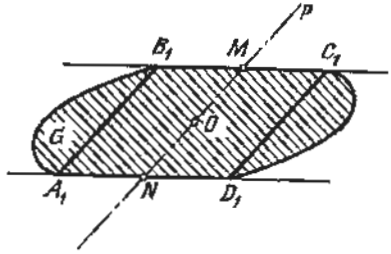


FIG. 120

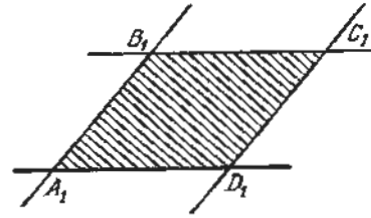


FIG. 121

Análogamente trazando una recta q, paralela a los lados $B_1 C_1$ y $A_1 D_1$ hallamos que o bien $a_G(F')=2$, o bien la figura G está situada en la banda entre las rectas $A_1 B_1$ y $C_1 D_1$. Considerando conjuntamente los dos casos expuestos, se desprende que o bien $a_G(F')=2$, o bien que la figura G se encuentra en el interior de las dos bandas indicadas es decir, se encuentra en el paralelogramo F' (fig. 121). Pero en este último caso, la figura G debe coincidir con el paralelogramo F' (ya que ella *contiene* por completo el paralelogramo F').

Así, o bien $a_G(F)=a_G(F')=2$, o bien la figura G coincide con el paralelogramo F' (es decir, es homotécica a F) y entonces, como ya sabemos $a_G(F)=a_G(F')=4$. En otras palabras, para las figuras *convexas* F, la afirmación del teorema 4 es válida.

Sea ahora F una figura no convexa. Si la cubierta convexa $\widetilde{F}$ de la figura F es un paralelogramo homotécico a G (fig. 83), entonces $a_G(F)=4$. Por el contrario, si la figura $\widetilde{F}$ no es homotécica a G, en virtud de lo demostrado, $a_G(\widetilde{F})\leqslant 3$, y como F se encuentra en $\widetilde{F}$, ni que decir tiene que $a_G(F)\leqslant 3$.

El teorema queda demostrado.

CAPÍTULO IV

PROBLEMA DE ILUMINACIÓN

§ 15. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En nuestro último capítulo examinaremos otro de los problemas de la teoría de las figuras convexas. Por su planteamiento, este problema casi en nada se parece a los anteriores, pero como veremos más adelante, está ligado estrechamente a ellos.

Sea F una figura plana, acotada y convexa y l, una dirección arbitraria en el plano de dicha figura. Llamaremos al punto límite A de la figura F *punto de luminosidad* respecto a la dirección l si un haz de rayos paralelos con dirección l, "ilumina" en el contorno de la figura F el punto A y a parte de sus proximidades (fig. 122). Señalemos que

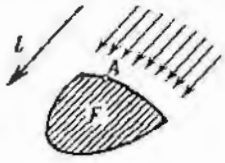


FIG. 122

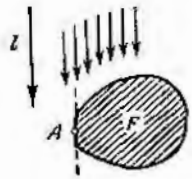


FIG. 123

si una recta paralela a la dirección l que pasa por el punto A, es recta de apoyo de la figura F (fig. 123), en tal caso no podemos considerar A como punto de luminosidad respecto a la dirección l. En otras palabras, A será punto de luminosidad si se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. La recta p paralela a la dirección l y que pasa por el punto A, no es recta de apoyo de la figura F (es decir, en la recta p hay puntos interiores de la figura F).

2. El punto A es el *primero* de la figura F que encontramos, moviéndonos por la recta p en la dirección l.

Convendremos en considerar que las direcciones l_1, l_2, ..., l_m *iluminan* todo el contorno de la figura F, si cada punto límite de esta figura es punto de luminosidad, por lo menos, respecto a una de las direcciones indicadas. Por último, designemos por $c\,(F)$ el menor de tales números naturales m que muestran que en el plano existen m direcciones que iluminan todo el contorno de la figura F. Llamemos *problema de iluminación* del contorno de la figura F el problema de la determinación del número $c\,(F)$. Este problema fue planteado por V. G. Boltianski el año 1960.

Se demuestra con facilidad que para toda figura plana F, $c\,(F) \geqslant 3$. En efecto, sea F una figura plana acotada convexa y l_1, l_2 dos direcciones arbitrarias. Tracemos dos rectas de apoyo de la figura F paralelas a la dirección l_1 y supongamos que A y B, son puntos límites de la figura F situados en dichas rectas de apoyo (fig. 124). En tal caso, ni

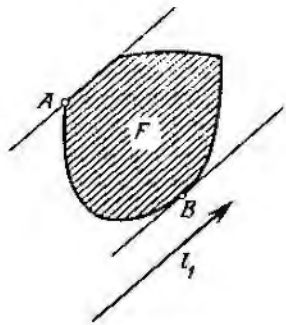


FIG. 124

uno de los puntos A, B no es punto de luminosidad para la dirección l_1, mientras que la dirección l_2 ilumina no más de uno de estos dos puntos. Así dos direcciones no son suficientes para iluminar todo el contorno de la figura F.

Cuando la figura F es un círculo (fig. 125), para iluminar todo su contorno son suficientes tres direcciones. Para el paralelogramo (fig. 126), tres direcciones no son suficientes (ya que una dirección no ilumina simultáneamente

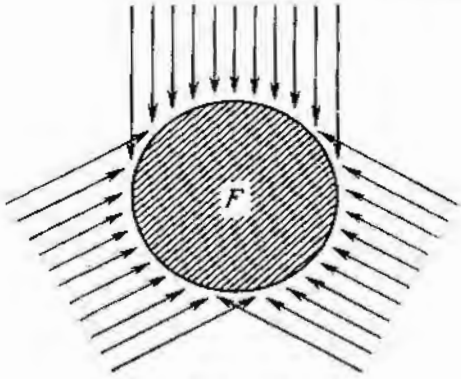


FIG. 125

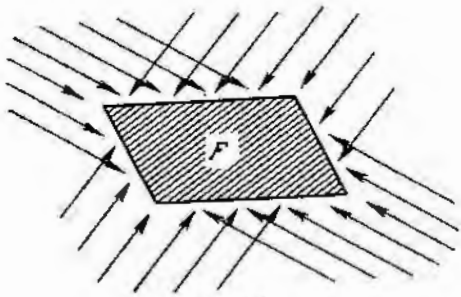


FIG. 126

dos de sus vértices) mientras que cuatro direcciones permiten iluminar todo el contorno del paralelogramo. En otras palabras, para el círculo $c\,(F)=3$ y para el paralelogramo, $c\,(F)=4$.

§ 16.
SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE ILUMINACIÓN

Al resolver el problema de iluminación, hacemos uso de las proposiciones auxiliares establecidas en el § 13, y también del lema siguiente:

Lema 12. *Sea F una figura convexa, AB su cuerda mayor y D, E puntos límites de dicha figura situados por uno de los lados de la cuerda AB. En tal caso, todo el arco DE situado por uno de los lados de la cuerda AB, se puede iluminar con una sóla dirección* (fig. 127).

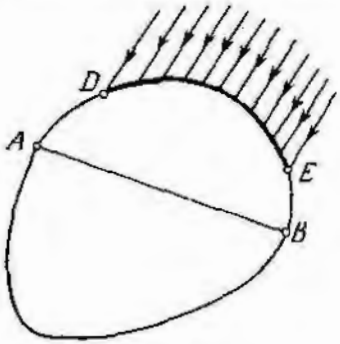


FIG. 127

Demostración. Sea MN una cuerda paralela a AB y que separa el segmento AB de los puntos D y E. Ya que $MN < AB$, se puede tomar en AB dos puntos *interiores* P y Q de modo que $PQ=MN$ y por consiguiente, $PQNM$ será un paralelogramo. Designemos por l la dirección que se determina por el vector $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NQ}$. Claro está que toda recta paralela a l y que pasa por el punto arbitrario C del arco MN (en el que no están situados los puntos A y B; véase la fig. 128), tiene la propiedad de que al moverse por ella desde el punto C en la dirección l, se interseca el segmento MN formado por puntos interiores de la figura F. En otras palabras, todo punto C del arco MN se ilumina por la dirección l. En particular, todo el arco DE se ilumina íntegramente por la dirección l.

El lema queda demostrado.

Lo mismo que en el problema del recubrimiento de una figura por figuras menores homotécicas, en el problema que consideramos el paralelogramo juega un papel muy importante. Precisamente tiene lugar el siguiente teorema:

Teorema 8. *Para cualquier figura plana acotada convexa F, que no es un paralelogramo, es válida la igualdad $c(F)=3$; si F es un paralelogramo, $c(F)=4$.*

La **demostración** de este teorema es análoga a la del teorema 6. Sea F una figura diferente a un paralelogramo. Entonces, en virtud del teorema 7, F tiene tres cuerdas mayores.

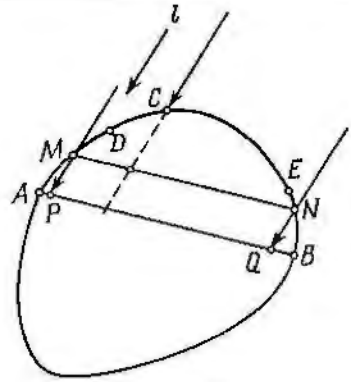


FIG. 128

Como al demostrar el teorema 6, examinemos, primeramente, el caso en que dos cuerdas mayores de la figura F se intersecan en su contorno (fig. 109).

En virtud del lema 12 cada uno de los arcos KBL y DCE puede ser iluminado por una dirección. En tal caso los puntos L y D pueden ser elegidos tan próximos al punto A como se desee. Es evidente que el arco restante LAD también se puede iluminar con una sola dirección. Por consiguiente, en el caso a considerar

$$c(F) \leqslant 3.$$

Pasemos al segundo caso, cuando las tres cuerdas mayores AD, BE, CH de la figura F se intersecan en su interior (fig. 110-112). En virtud del lema 12 cada uno de los arcos MBN, PAQ y SDT se puede iluminar con una sola dirección. En consecuencia, en este caso, también $c(F)\leqslant 3$.

Por último, como mostramos anteriormente, para toda figura convexa F es válida la desigualdad

$$c(F) \geqslant 3.$$

Por lo tanto, si F no es un paralelogramo, $c\ (F)=3$. El teorema queda demostrado.

§ 17.
EQUIVALENCIA DE DOS PROBLEMAS

Sin duda alguna, nuestro lector ya ha advertido que para toda figura plana acotada y convexa F, los números $b\ (F)$ y $c\ (F)$ coinciden (véanse los teoremas 6 y 8).

En otras palabras es válido el siguiente

Teorema 9. *Para toda figura convexa F es válida la igualdad*

$$b(F) = c(F).$$

Esta igualdad tiene lugar no sólo para las figuras *planas*, sino que también para los cuerpos convexos en el espacio (incluso en espacios multidimensionales). Esto fue demostrado por V. G. Boltianski el año 1960.

La esencia de la demostración del teorema 9 consiste en lo siguiente. De los tres teoremas 6, 8, 9 es suficiente demostrar *dos* de ellos y el tercero será, evidentemente, su consecuencia. Por esta razón, de estos teoremas se podría demostrar aquellos dos, cuya demostración sea más sencilla. En particular, si al lector le ha parecido que la demostración del teorema 6 (por lo visto más complicada) es fatigosa y él la ha omitido, ahora, después de leer la demostración del teorema 9, obtendrá (con ayuda del teorema 8) una nueva demostración del teorema 6. Sin embargo, lo más importante es que para los cuerpos espaciales, para los cuales la solución del problema de su recubrimiento e iluminación es, hasta el momento, desconocida ([15]) sería suficiente resolver uno de estos dos problemas ya que en virtud del teorema 9, ellos son equivalentes. Pero el problema de iluminación tiene, por lo visto, la ventaja de ser, en cierto grado, más evidente.

Demostración del teorema 9.

Supongamos que la figura plana convexa F puede ser cubierta por m figuras menores homotécicas F_1, F_2, ...,

F_m. El centro de homotecia que provoca la conversión de la figura F a F_i lo designemos por O_i y el coeficiente de esta homotecia, por k_i ($i=1, 2, \ldots, m$). Por lo tanto, cada uno de los números $k_1, k_2, \ldots k_m$ es menor que la unidad.

Elijamos ahora un punto interior arbitrario A de la figura F que no coincida con ninguno de los puntos $O_1, O_2, \ldots, O_m$ y designemos por $l_1, l_2, \ldots, l_m$ las direcciones determinadas por los rayos $\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_2A}, \ldots, \overrightarrow{O_mA}$. Demostremos que las direcciones $l_1, l_2, \ldots, l_m$ iluminan todo el contorno de la figura F. En efecto, sea B un punto límite arbitrario de la figura F (fig. 129). Entonces, el punto B perte-

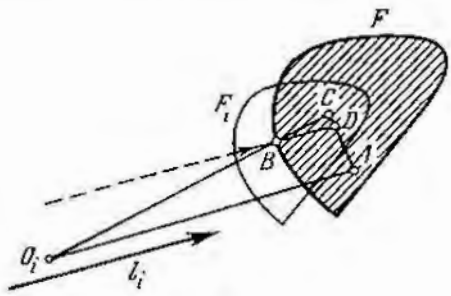


FIG. 129

nece, por lo menos, a uno de los conjuntos $F_1, F_2, \ldots, F_m$, por ejemplo, a F_i. Ya que en el caso de la homotecia con centro O_i y coeficiente k_i la figura F se convierte en F_i, se encontrará un punto C de la figura F que debida a esta homotecia pasa al punto B. De ese modo, $O_iB : O_iC = k_i$. Ahora tomemos en el segmento AC un punto D tal que $AD : AC = k_i$. De la igualdad $O_iB : O_iC = AD : AC$ se desprende, que $BD \parallel O_iA$, es decir, la recta BD es paralela a la dirección l_i. A continuación, ya que el punto C pertenece a la figura F y A es un punto *interior* de esta figura, todos los puntos del segmento AC (posiblemente, salvo el punto C) son puntos interiores de la figura F; en particular, D es un punto interior de esta figura.

Así, la recta BD paralela a la dirección l_i, pasa por

el punto interior D de la figura F. De aquí se desprende que B es un punto de luminosidad con respecto a la dirección l_1. De esta forma, cualquier punto límite de la figura F se ilumina por una de las direcciones $l_1, l_2, \ldots, l_m$.

Hemos demostrado, que si la figura F puede ser cubierta por m figuras menores hemotécicas, para la iluminación de su contorno son suficientes m direcciones. Por consiguiente, es válida la desigualdad

$$c(F) \leqslant b(F).$$

A continuación, establezcamos la validez de la desigualdad inversa

$$c(F) \geqslant b(F)$$

Supongamos que s direcciones $l_1', l_2', \ldots, l_s'$ iluminan todo el contorno de la figura F. Tracemos dos rectas de apoyo de esta figura paralelas a la dirección l_i' (fig. 130) y designemos por A y B los *primeros* puntos de la figura F que hallamos desplazándonos por estas rectas en la dirección l_i'. Está entonces claro que todos los puntos del arco Δ_i, cuyos extremos son A, B (diseñado en la fig. 130 con una línea

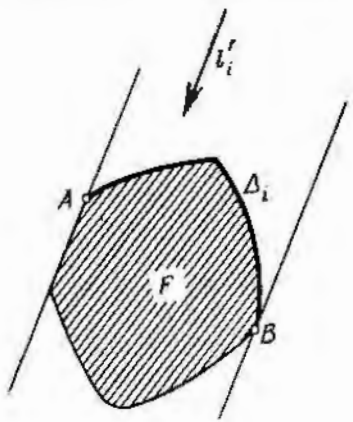


FIG. 130

gruesa), salvo dichos puntos extremos, son puntos de luminosidad respecto a la dirección l'_i. O sea, que el conjunto de todos los puntos de luminosidad respecto a dicha dirección, es cierto arco Δ_i sin extremos; llamaremos este conjunto a *región de luminosidad* respecto a la dirección l'_i. Como las direcciones l'_1, l'_2, ..., l'_s iluminan todo el contorno de la figura F, las respectivas regiones de luminosidad Δ_1, Δ_2, ..., Δ_s cubren todo el contorno de la figura F.

En la fig. 130, el punto A no es punto de luminosidad respecto a la dirección l'_i y por esta razón, dicho punto se ilumina por cualquier otra de las direcciones l'_1, l'_2, ..., l'_s, por ejemplo, por la dirección l'_j. Pero entonces, la indicada dirección ilumina todos los puntos suficientemente próximos al punto A, es decir, las regiones de luminosidad Δ_i y Δ_j *se sobrecubren* (fig. 131). Idénticamente, el segun-

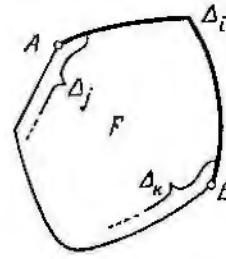


FIG. 131

do extremo B del arco Δ_i, se cubre por una región de luminosidad más Δ_k.

En virtud de que los arcos Δ_1, Δ_2, ..., Δ_s que son regiones de luminosidad, sobrecubren con sus extremos los unos a los otros, podemos disminuirlos un poco y estos arcos disminuidos, continuarán ocupando todo el contorno de la figura F. En otras palabras, se pueden tomar de tal modo los arcos Δ_1^*, Δ_2^*, ..., Δ_s^* situados (junto con sus extremos) respectivamente en el *interior* de los arcos Δ_1, Δ_2, ..., Δ_s (fig. 132) que estos arcos Δ_1^*, Δ_2^*, ..., Δ_s^*, formen todo el contorno de la figura F.

Designemos por A y B los extremos del arco Δ_i y por A^* y B^*, los del arco Δ_i^*. Las rectas trazadas por los puntos A^* y B^*, paralelamente a la dirección l_i', deben pasar por los puntos interiores de la figura F (ya que A^* y B^*

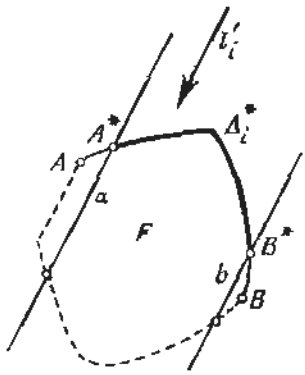


FIG. 132

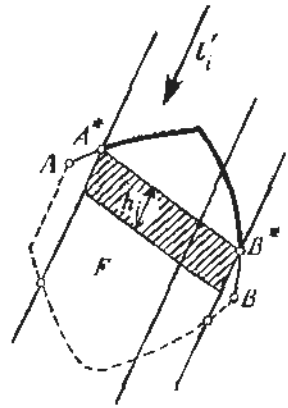


FIG. 133

son puntos de luminosidad respecto a la dirección l_i'). Designemos por a y b la longitud de las cuerdas que la figura F corta en dichas rectas y elijamos un segmento h_i, menor que a y b. En este caso, el paralelogramo, un lado del cual coincide con $A^*\,B^*$, el segundo es paralelo a l_i' y tiene una longitud, igual a h_i, está situado por completo en la figura F (fig. 133). De aquí resulta que la figura F en toda recta paralela a la dirección l_i' y que pasa por cualquier punto del arco Δ_i^*, corta una cuerda cuya longitud es mayor que h_i. Esto significa que el traslado paralelo del arco Δ_i^* en la dirección l_i' a una distancia h_i (fig. 134), hace transponer por completo el arco Δ_i^* en el interior de la figura F. En otras palabras, que al realizar el traslado paralelo de la figura F en una dirección *inversa* a l_i' y a una distancia igual a h_i, obtendremos la figura F_i^*, en cuyo *interior* se encuentra el arco Δ_i^* (fig. 135). Por esta razón, eligiendo

en el interior de F_i^* un punto arbitrario O_i^* y realizando la homotecia de F_i^* con centro en O_i^* y con coeficiente $k_i^*<1$ bastante próximo a la unidad, obtendremos la figura F_i'

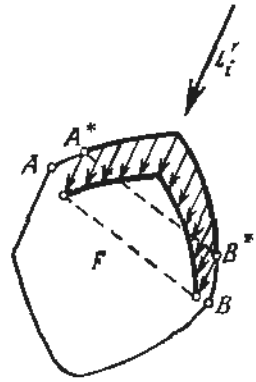


FIG. 134

homotécica a F_i^* (y por consiguiente, a la figura F) y que contiene el arco Δ_i^*. Realicemos esta construcción para todos los valores de $i=1, 2, \ldots, s$ y obtendremos las figuras F_1', F_2', ..., F_s', homotécicas a F con coeficientes de homotecia menores que la unidad.

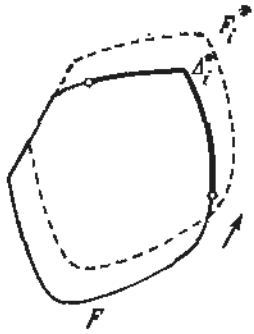


FIG. 135

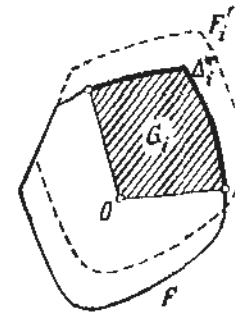


FIG. 136

Sea ahora O cierto punto interior de la figura F. Podemos suponer, que las construcciones precedentes han sido realizadas de tal forma que cada una de las figuras F_1', F_2', ... , F_s' contiene el punto O (fig. 136); con este objeto, es preciso tomar únicamente los segmentos h_i suficientemente pequeños y los coeficientes k_i^* bastante próximos a la unidad (véanse las págs. 69-70).

Por último, designemos por G_i a un "sector" con vértice O y arco Δ_i^* (dicho sector está rayado en la fig. 136). Ya que la figura F_i' es convexa y, además, contiene el arco Δ_i^* y el punto O, esta figura contendrá por completo el sector G_i. En consecuencia, las figuras F_1', F_2', ..., F_s' en conjunto contienen todos los sectores G_1, G_2, ..., G_s. Pero está claro que dichos sectores llenan toda la figura F (ya que los arcos Δ_1^*, Δ_2^*, ..., Δ_s^* cubren a todo el contorno de la figura F). Por esta razón, las figuras F_1', F_2', ..., F_s' cubren por completo la figura F.

Hemos demostrado que si todo el contorno de la figura F puede ser iluminado por s direcciones, dicha figura podrá ser cubierta por s figuras homotécicas menores. Por consiguiente, es válida la desigualdad

$$b(F) \leqslant c(F).$$

De las desigualdades demostradas $c(F) \leqslant b(F)$, $b(F) \leqslant c(F)$ se deduce la validez de la igualdad

$$b(F) = c(F),$$

que forma el contenido del teorema 9.

§ 18.
DIVISIÓN E ILUMINACIÓN DE FIGURAS CONVEXAS NO ACOTADAS

Para las figuras no acotadas convexas (véase la fig. 22), el problema de Borsuk no tiene sentido ya que el diámetro de dicha figura llega a ser infinito. Sin embargo, el pro-

blema de la iluminación y el del recubrimiento de la figura con las homotécicas menores (es decir, con figuras homotécicas a la dada con coeficientes de homotecia menores que la unidad), siguen teniendo sentido. Pero aquí, desde el principio, nos esperan una "sorpresa" : *el teorema 9 sobre la igualdad de las magnitudes b (F) y c (F) deja de ser válido para las figuras no acotadas convexas.*

Con la mayor facilidad esto se ve examinando el ejemplo de una figura convexa acotada por la *parábola P*. El contorno P de esta figura puede ser iluminado por *una sola* dirección, o sea, $c(F)=1$ (fig. 137, *a*). Al mismo tiempo, como al instante veremos, es imposible cubrir la figura F con un número *finito* de figuras homotécicas menores, es decir, $b(F)=\infty$. Efectivamente, sea F' una figura homotécica a F con coeficiente de homotecia $k<1$ y con centro de homotecia en el punto O situado fuera de la figura F (fig. 137 *b*). Tracemos desde el punto O las tangentes OA y OB a la parábola P que limita la figura F. Los puntos A y B dividen la parábola P en tres partes: en el arco AB y en dos arcos infinitos Δ_1 y Δ_2 cuyos extremos son los puntos A y B. Es claro que la figura F' no contiene ningún punto de los arcos Δ_1 y Δ_2 (ya que si M es un punto de dichos arcos en la recta OM tras el punto M, no hay puntos de la figura F). De ese modo, la figura F' puede sólo contener una parte finita de la parábola P (situada en el arco AB). Si el centro de homotecia O pertenece a la figura F, F' contiene no más de un punto de la parábola P (fig. 137, *c*, *d*). Por lo tanto, cada figura homotécica a F con coeficiente $k<1$, contiene sólo una parte finita de la parábola P y por esto, para cubrir por completo la figura F (que contiene la parábola P), es necesario un número infinito de figuras homotécicas menores, es decir, $b(F)=\infty$.

Sin embargo, existen tales figuras no acotadas convexas para las que la magnitud $b(F)$ es finita. Por ejemplo, si F es una *semibanda* (rayada en la fig. 138, *a*), $b(F)=2$; señalemos que en este caso $c(F)$ es también igual a dos, es decir, $b(F)=c(F)$.

Por último, existen también tales figuras no acotadas convexas, para las que las dos magnitudes $b(F)$ y $c(F)$ son finitas pero no coinciden entre sí. Por ejemplo, si la figura F está situada en una banda entre dos rectas paralelas y se aproxima a ellas más y más a medida que se aleje al "in-

finito" (fig. 138 *b*), es fácil mostrar que $b(F)=2$ y $c(F)=1$.

En virtud de lo dicho, surgen las siguientes preguntas:

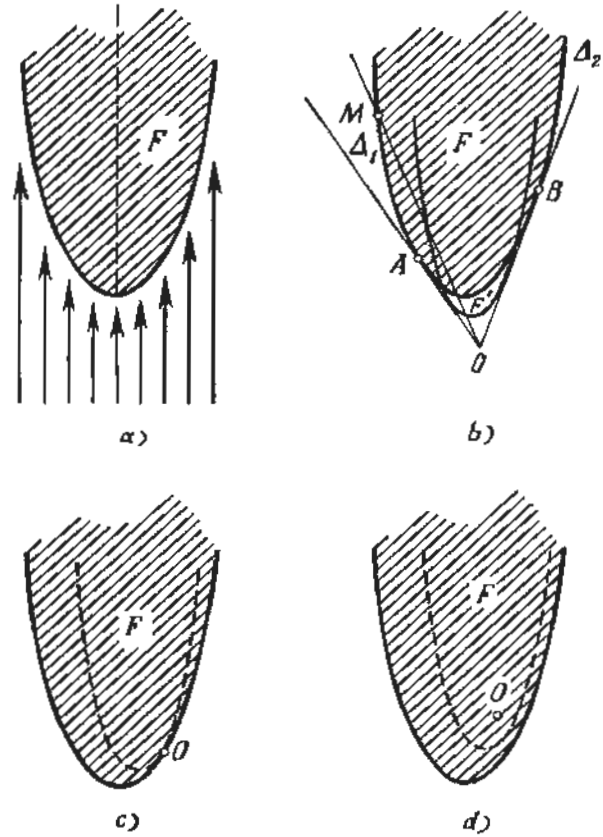


FIG. 137

¿Para qué figuras no acotadas convexas sigue siendo válida la igualdad $b(F)=c(F)$?

¿Para qué figuras no acotadas convexas la magnitud $b(F)$ toma valores finitos?

¿Existen figuras no acotadas convexas para las que $c(F)=\infty$?

Las respuestas a las preguntas anteriormente planteadas, fueron halladas por P. S. Soltan y V. N. Visitey ([16]). Daremos sus resultados sin demostrarlas.

Indiquemos, primeramente, que del teorema 9 algo queda para las figuras no acotadas convexas. Precisamente, la primera parte de la demostración de dicho teorema, se con-

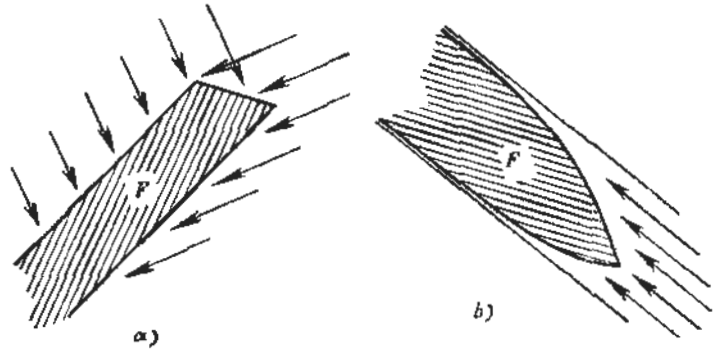


FIG. 138

serva por completo y por esta razón, *para toda figura F no acotada convexa es válida la desigualdad*

$$c(F) \leqslant b(F).$$

Formulemos ahora un teorema que da la respuesta a la segunda de las preguntas planteadas. Sea F una figura no acotada convexa. Tomemos un punto interior arbitrario O de dicha figura y consideremos todos los rayos posibles que parten del punto O y están por completo situados en la figura F. Todos los rayos indicados, tomados en conjunto, forman, como se demuestra con facilidad, una figura no acotada convexa K; esta figura se llama *ángulo inscrito* de la figura F con vértice en el punto O. Por ejemplo, para una parábola (fig. 139 *a*) o bien, semibanda (fig. 139 *b*), el ángulo inscrito consta únicamente de un rayo mientras que para la región interior de una rama de la hipérbola, el ángulo inscrito se representa en la fig. 139 *c*. (Señalemos que si en lugar del punto O como vértice se toma otro cual-

quier punto interior de la figura F, el ángulo inscrito no variará, sino que sólo someterá al traslado paralelo).

Además, P. S. Soltan llama a la figura no acotada convexa F *casi cónica*, si hay un tal segmento r que todos los puntos de la figura F estén situados a una distancia no mayor de r del ángulo inscrito K. Por ejemplo, las figuras representadas en la fig. 139 *b* y *c*) son casi cónicas mientras que la figura representada en la fig. 139 *a*) no lo es ya que

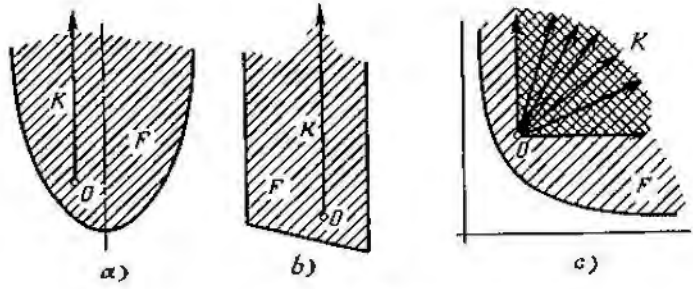


FIG. 139

los puntos de la parábola se alejan constantemente de su eje.

Teorema 10. *Para una figura no acotada convexa F, la magnitud $b(F)$ toma un valor finito, únicamente en el caso cuando la figura F es casi cónica.*

Con esto, para la figura casi cónica F la magnitud $b(F)$ puede tomar sólo los valores 1 y 2. Sea precisamente F una figura bidimensional casi cónica que no contiene por completo ninguna recta; si su ángulo inscrito K es un rayo, entonces $b(F)=2$, y si K es un ángulo, $b(F)=1$. Por último, si la figura bidimensional convexa contiene por completo una recta, ella puede ser una banda, semiplano o plano; en estos casos la magnitud $b(F)$ toma respectivamente los valores 2, 1, 1. Por esto, para las figuras planas no acotadas convexas el problema de los valores de la magnitud $b(F)$ está solucionado totalmente.

NOTAS

(1) (pág. 9). La definición del diámetro de la figura que se da en el texto, supone imprecisamente que cada "figura" a examinar es un conjunto *cerrado* (es decir, a la figura pertenecen todos sus puntos límites). Por ejemplo, si F es un círculo *abierto* de diámetro d (es decir, un círculo al que no pertenecen los puntos de la circunferencia que lo limita), el *término exacto superior* de las distancias entre dos puntos de la figura F es igual a d; sin embargo, en este caso no existen dos puntos de la figura F la distancia entre los cuales es exactamente igual a d. En cambio, si anexamos a la figura F todos los puntos límites (o sea, al examinar un círculo *cerrado*), dicho término exacto superior se alcanzará: hallaremos dos puntos A y B la distancia entre los cuales es exactamente igual a d.

Por lo general, si F es un conjunto *cerrado* y acotado (en el plano o bien en el espacio euclidiano con un número de dimensiones arbitrario), encontraremos dos puntos A y B de la figura F la distancia entre los cuales es la máxima. En realidad, sean M y N dos puntos arbitrarios del conjunto F y $\rho\,(M, N)$, la distancia entre ellos. La función $\rho\,(M, N)$ es *continua* (por M, N). Pero toda función continua (en el caso dado, de dos variables M, N), cuyos argumentos varían en un conjunto cerrado acotado, alcanza obligatoriamente sus valores máximo (y mínimo). De ese modo, encontraremos dos tales puntos A y B de la figura F con los que $\rho\,(A, B) \geqslant (M, N)$ para cualesquiera puntos M, N de la figura F. La distancia $d=\rho\,(A, B)$ entre tales puntos es el *diámetro* del conjunto F.

(2) (pág. 11). En efecto, sean A y B dos puntos del polígono F. Si el punto A no es uno de los vértices de dicha figura, encontraremos un segmento CD que contiene el punto A en su interior y que pertene-

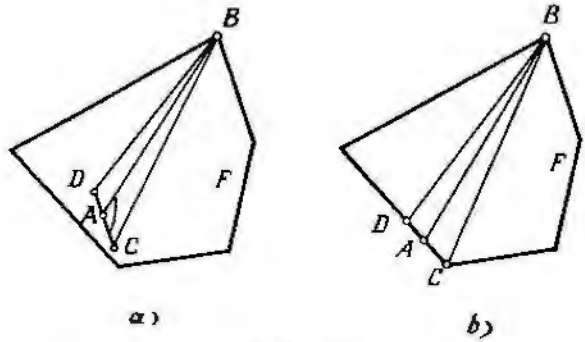


FIG. 140

ce por completo al polígono F (fig. 140 *a*, *b*). Consideremos para mayor certeza que $\angle BAC \geqslant \angle BAD$. En tal caso, en el triángulo ABC el ángulo A es mayor o igual a 90°, es decir, $\angle BAC > \angle BCA$, y por

lo tanto, $BC > AB$. Por consiguiente, AB no es el diámetro de la figura F. Pues, si por lo menos uno de los puntos A, B no es el vértice del polígono F, AB no es el diámetro de éste. De lo dicho se desprende que el diámetro del polígono será la distancia entre dos de sus *vértices*, o exactamente, la distancia entre los dos vértices más alejados uno del otro.

(3) (pág. 12). Aquí se trata de la división de las figuras en partes y de los diámetros de éstas. De acuerdo con la anterior nota, vamos a considerar que las partes en las que la figura se divide, son también conjuntos cerrados. Por esta razón, la proposición que se explica en el texto, se precisa de la manera siguiente: *si un círculo F de diámetro d está representado de cualquier modo por la unión de sus subconjuntos cerrados, por lo menos uno de estos tiene el mismo diámetro d.* Sin duda, el razonamiento mostrado en la pág. 11 no nos da una demostración completa de esta afirmación. La demostración correcta tiene el siguiente aspecto. Designemos por H_1 y H_2 los subconjuntos cerrados a considerar (pues su *unión* $H_1 \cup H_2$ nos da el círculo completo F). Los puntos del conjunto H_1 situados en la circunferencia del círculo F forman cierto conjunto K_1; análogamente se determina el conjunto K_2. De esta forma, la circunferencia del círculo F se representa como la unión de dos de sus subconjuntos cerrados K_1 y K_2. Si uno de estos conjuntos, digamos K_2, está vacío (es decir, no contiene ni un solo punto), entonces K_1 coincide con toda la circunferencia; por esto, K_1 y por lo tanto, H_1 tienen un diámetro igual a d. Si ambos conjuntos K_1 y K_2 no están vacíos, ellos tienen obligatoriamente un punto común A (ya que la circunferencia es *continua* y por lo tanto, no podrá ser representada como la unión de dos subconjuntos cerrados que no se intersecan). Designemos por B el punto diametralmente opuesto a A y para mayor certeza, supongamos que el punto B pertenece al conjunto K_2. En tal caso, K_2 contiene los dos puntos A, B. Por consiguiente, el conjunto K_2 y por lo tanto, H_2 tienen el diámetro d. Así, en todo caso, por lo menos uno de los conjuntos H_1, H_2 tiene el diámetro d.

(4) (pág. 13). Hagamos una observación más con motivo de la "división" de las figuras en sus partes. La palabra "división" se puede comprender en el sentido de que la figura F está representada como la *unión* de varios de sus subconjuntos cerrados:

$$F = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m$$

(precisamente así se mostró en la nota (3)). En este caso, los matemáticos dicen que los conjuntos $H_1, H_2, \ldots, H_m$ forman la *cubierta* de la figura F. Sin embargo, es más natural si el término "dividir" se comprende en el sentido que significa que los conjuntos $H_1, H_2, \ldots, H_m$ no sólo forman la cubierta de la figura F, sino que además, *no se sobrecubren* recíprocamente, es decir, cada par no tiene puntos interiores comunes.

Es fácil comprender que el sentido del problema de la división de figuras en partes de menor diámetro no varía en dependencia de cual de estos sentidos demos al término "división en partes". Efectivamente, si la figura F se representa como la unión de varios de sus

subconjuntos cerrados

$$F = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m$$

(siendo posible que se sobrecubran recíprocamente), podemos, sin aumentar el diámetro de las partes, "corregirlas" de tal manera que no se sobrecubran recíprocamente. Con este objeto, señalemos, que

$$H_1 \setminus (H_2 \cup H_3 \cup \ldots \cup H_m),$$
$$H_2 \setminus (H_3 \cup \ldots \cup H_m),$$

. . . . . .

$$H_{m-2} \setminus (H_{m-1} \cup H_m),$$
$$H_{m-1} \setminus H_m,$$
$$H_m$$

los conjuntos*) forman la cubierta de la figura F y que cada par no tiene puntos comunes. Es verdad, dichos conjuntos pueden resultar ser abiertos. Sin embargo, el *cierre* de estos conjuntos, o sea los conjuntos

$$H'_1 = \overline{H_1 \setminus (H_2 \cup H_3 \cup \ldots \cup H_m)},$$
$$H'_2 = \overline{H_2 \setminus (H_3 \cup \ldots \cup H_m)},$$

. . . . . .

$$H'_{m-1} = \overline{H_{m-1} \setminus H_m},$$
$$H'_m = H_m,$$

serán ya subconjuntos cerrados de la figura F que cada par no tiene puntos interiores comunes y que cubren a toda la figura F.

De ese modo, de la cubierta arbitraria de la figura F (H_1, H_2, ..., H_m) por subconjuntos cerrados, hemos obtenido una cubierta (H'_1, H'_2, ..., H'_m) que consta de conjuntos que no se sobrecubren recíprocamente. Al mismo tiempo, sin duda los diámetros de las partes no han aumentado (ya que el conjunto H_i contiene el conjunto H'_i).

(5) (pág. 13). El problema de la división de figuras en partes de menor diámetro, o sea el problema de los valores que puede alcanzar $a(F)$, puede ser considerado no sólo para figuras *planas*, sino que también para cuerpos *espaciales* e incluso para cuerpos en el *espacio euclidiano n-dimensional*. Precisamente, K. Borsuk formuló su problema para cuerpos n-dimensionales, pero halló la solución completa del problema, sólo para las figuras planas (el teorema de Borsuk se expuso en el § 3 del presente libro). Borsuk también demostró que para la esfera n-dimensional tiene lugar la igualdad $a(F) = n+1$ (en particular, para la esfera corriente, tridimensional, es válida la igualdad $a(F) = 4$). Por esta razón, él planteó el siguiente problema: *demostrar que para todo cuerpo de n-dimensión F es válida la desigualdad* $a(F) \leqslant n+$

*) Con el símbolo $A \setminus B$ se designa el conjunto que se obtiene si del conjunto A se separan todos los puntos que pertenecen al conjunto B.

†1. La original solución del problema dada por Borsuk para $n=2$ y la atractiva sencillez con la que fue formulado el problema, llamó la atención de muchos matemáticos. Pero en el caso cuando $n>2$, el problema resultó ser mucho más complicado. Sólo en el año 1955 (o sea, 25 años después de ser tal problema planteado), el matemático inglés Eggleston consiguió resolver el problema para $n=3$; él demostró que como suponía Borsuk para todo cuerpo tridimensional la desigualdad $a(F)\leqslant 4$, es válida. Dos años después, el matemático americano Grünbaum y el húngaro Heppesh hallaron demostraciones más sencillas que las de Eggleston. Para $n>3$, el problema de Borsuk no ha sido resuelto hasta la fecha. Sin embargo, todas estas cuestiones las dejamos a un lado, ya que el presente libro está dedicado a las figuras planas. Los lectores que se interesen por este conjunto de cuestiones, pueden hallar una respuesta más detallada en el libro de los mismos autores, "Problemas y teoremas de la geometría combinatoria".

(*) (pág. 15). El razonamiento que se da en el texto (relacionado con la "aproximación" de la recta l a la figura F), lógicamente no da una demostración rigurosa de la existencia de una recta de apoyo l_1. Una demostración exacta podemos conseguir, digamos, de la manera siguiente. Tracemos una recta l que no interseca la figura F y la recta m, perpendicular a la primera. Tomemos l y m como ejes de coordenadas (fig. 141) y designemos por $y(A)$ la *ordenada* de cualquier punto A (medida por la recta m) de la figura F. Por lo tanto, en la figura F se determina la función $y(A)$, que es continua (ya que la diferencia $y(A)-y(A')$ no supera a la longitud del segmento AA'). Pero una función continua, definida para el conjunto cerrado y acotado F,

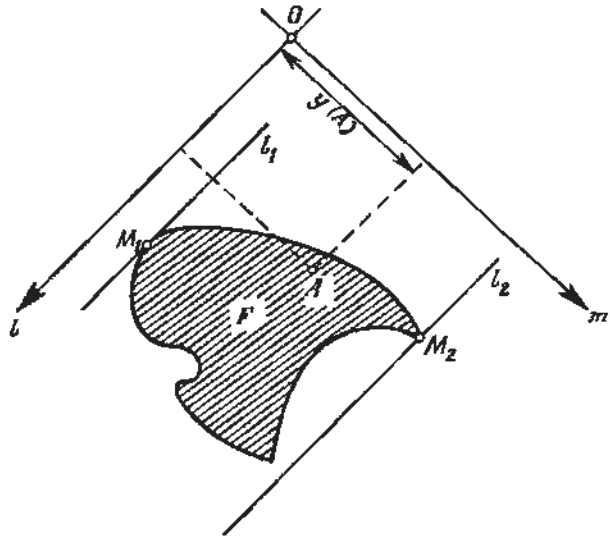


FIG. 141

alcanza sus valores máximo y mínimo. En otras palabras, existen tales puntos M_1 y M_2 de la figura F con los que $y(M_1) \leqslant y(A) \leqslant y(M_2)$ para todo punto A de dicha figura. Pero esto significa que si trazamos por los puntos M_1 y M_2 rectas paralelas al eje de las abcisas l, la figura F estará situada por completo entre estas dos rectas. De esa manera, las rectas l_1 y l_2 que pasan por los puntos M_1 y M_2 y son paralelas a l, son aquellas rectas de apoyo a las que nos referíamos en el texto (véase la fig. 14).

(7) (pág. 16). Mostremos, por ejemplo, que el punto A depende continuamente de la dirección de la recta l_1. Supongamos que la recta l_1 ha girado cierto ángulo α (fig. 142). La posición de las rectas l_1, l_2, m_1, m_2 en aquel momento, la designaremos por l_1', l_2', m_1', m_2'. Por los puntos A y B tracemos las rectas m_A y m_B que con m_1 forman

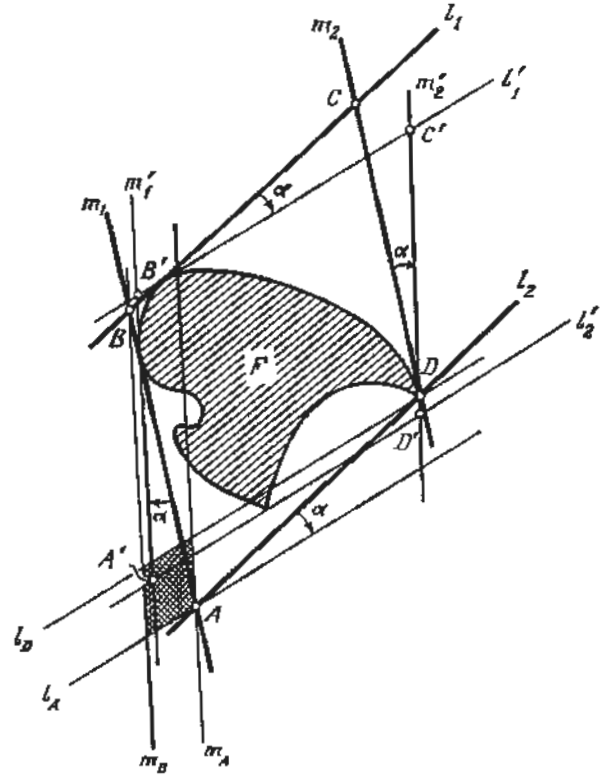


FIG. 142

un ángulo α (o sea, paralelas a m_1'). Puesto que la recta m_A corta la figura F, mientras la recta m_B no tiene puntos comunes con F, la recta m_1 está situada *entre* m_A y m_B De forma análoga, si trazamos por los puntos A y D las rectas l_A y l_D que forman con l_2 un ángulo α (o sea paralelas a la recta l_1'), hallaremos que la recta de apoyo l_1' está situada entre las rectas l_A y l_D. En consecuencia, el punto A', en el que se intersecan las rectas de apoyo m_1' y l_1', está situado en el interior del paralelogramo formado por las rectas m_A, m_B, l_A, l_D. No obstante, las dimensiones de este paralelogramo (que está rayado en la fig. 142) pueden ser tan pequeños como se desee si el ángulo α es suficientemente pequeño. De esta forma, el punto A' puede aproximarse cuanto se desee al punto A si el ángulo α es lo suficientemente pequeño. Y esto significa que el punto A depende continuamente de la dirección de la recta l_1.

(8) (pág. 23). En efecto, sea M cierto conjunto de figuras convexas y Φ, la intersección de todas estas figuras (es decir, un conjunto de puntos, cada uno de los cuales pertenece a *todas* estas figuras). Vamos a demostrar que la figura Φ es convexa. Sean A y B dos puntos de la indicada figura. Tomemos una figura arbitraria F del conjunto M. En este caso, los puntos A y B pertenecen a la figura F. Como ésta es convexa, de aquí se deduce que todo el segmento AB pertenece a la figura F. Así, *cada* figura F del conjunto M contiene el segmento AB y por esto el último está situado en la figura Φ. Esto significa que la figura Φ es convexa.

(9) (pág. 31). En el curso de geometría de la escuela media, la noción de *área* se determina sólo para las figuras más sencillas: polígonos y círculo. En realidad, dicha noción se define para clases mucho más amplias de figuras. En particular, se puede hablar sobre el área de toda *figura convexa acotada*. No vamos a dar aquí la definición del área de las figuras convexas (véanse sobre esto los artículos "Area y volumen" y "Figuras y cuerpos convexos" en el V tomo de la Enciclopedia de matemáticas elemental en ruso). Para nosotros es importante solamente que a cada figura convexa acotada F le corresponde cierto número positivo $s(F)$ que es el área de dicha figura, teniendo en cuenta que si la figura F' contiene la figura F y tiene puntos interiores que no pertenecen a la figura F, entonces $s(F')>s(F)$.

(10) (pág. 34) Así, H se determina como la unión de una *sucesión creciente* de figuras convexas H_0, H_1, H_2, ..., H_n, ... (es decir, una sucesión tal en la que cada figura contenga la anterior). En el texto se demuestra que la figura H es convexa y tiene el diámetro d. Sin embargo, señalemos que la unión de una sucesión creciente de figuras convexas puede resultar una figura convexa *abierta*. Por ejemplo, sea F_2, F_1, ..., F_n, ... una sucesión creciente de círculos (cerrados), y al mismo tiempo todos ellos hacen contacto interiormente el uno con el otro en el punto M y que el radio del círculo F_n es igual a $1-1/2^n$. (fig. 143). Entonces, la unión de esta sucesión creciente de figuras convexas será un círculo de radio 1 y con todo el punto M pertenece a este círculo, mientras los demás puntos límites, no. En otras palabras la indicada unión es una figura convexa *abierta*.

Como nos hemos puesto de acuerdo en considerar sólo figuras convexas *cerradas*, entonces, hablando en rigor, conviene definir H de la forma siguiente: se toma la unión de todas las figuras H_0, H_1,

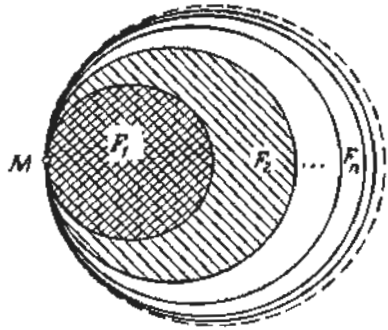


FIG. 143

H_2, ..., H_n, ... y a la figura convexa obtenida (y que puede resultar abierta) se añaden todos sus puntos límites. Sin embargo, esto no cambia la esencia del problema.

(11) (pág. 43). Señalemos que para el caso de los cuerpos espaciales (tridimensionales), el teorema demostrado no se generaliza directamente. Por ejemplo, para el *tetraedro regular* F con arista d, tendremos, evidentemente, $a(F)=4$, es decir, $a(F)$ alcanza su valor máximo. Al mismo tiempo, el cuerpo F *univocamente* se completa hasta un cuerpo de ancho constante d (véase las págs. 103-104 indicadas en la pág. 13 del libro de I. M. Yaglom y V. G. Boltianski). Por lo tanto, la igualdad $a(F)=4$ en el caso de cuerpos espaciales de diámetro d, está relacionada con circunstancias más imperceptibles que el complemento simple hasta el cuerpo de ancho constante d.

(12) (pág. 52). Efectivamente, sean l y l' dos rectas de apoyo paralelas de la figura F (fig. 144) y sea A, B puntos comunes de estas rectas con la figura F. Tracemos en el plano de Minkowski un círculo K_A con centro en el punto A y para el cual la recta l' es de apoyo. Entonces, el radio h de este círculo será igual a la distancia entre las rectas l y l', es decir, es igual al ancho de la figura F en la dirección l. El punto B o bien está situado en el contorno del círculo K_A o bien está fuera de este círculo. Por esto, lon. $\overrightarrow{AB} \geqslant h$ y por consiguiente, ni que decir tiene, el diámetro d de la figura F es mayor o igual a h. Así, el ancho de la figura F en toda dirección no es mayor que d y por lo tanto, el ancho máximo no supera a d.

Nos queda por demostrar que habrá tal dirección en la que el ancho de la figura F *sea igual* a su diámetro d. Dado M y N que son dos puntos de la figura F, la distancia entre los cuales *es igual* a d. Entonces la figura F está situada por completo en el círculo K_M de radio d y con centro en el punto M. Idénticamente, está situada por completo la figura F en el círculo K_N de radio d y con centro en el punto N (fig. 145). Tracemos una recta de apoyo n del círculo K_M

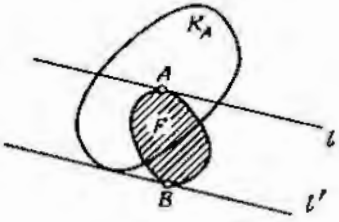


FIG. 144

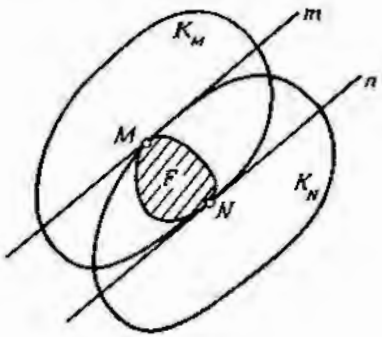


FIG. 145

que pasa por el punto N. Entonces la recta m paralela a la recta n y que pasa por el punto M, es recta de apoyo del círculo K_N. Es claro que toda la figura F está situada en la banda entre las rectas m y n así que estas son rectas de apoyo de la figura F. De la construcción es evidente que la distancia entre las rectas m y n (o sea el ancho de la figura F en la dirección m) es igual al radio del círculo K_M, es decir, igual a d.

[19] (pág. 54). Daremos la demostración de esta afirmación, empleando la noción de la *suma de las figuras convexas* (véase el § 4 del libro de I. M. Yaglom y V. G. Boltianski indicado en la pág. 19).

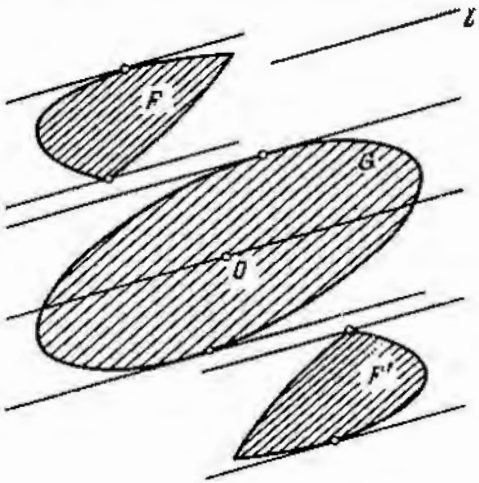


FIG. 146

Sea F una figura convexa arbitraria y F', otra figura simétrica a ella respecto a cierto punto O. Designaremos la suma $F+F'$ por G. En este caso, la figura G es convexa, centrosimétrica que se toma como círculo unidad en el plano de Minkowski. Está claro que el ancho de la figura F en cualquier dirección l, es igual al ancho de la figura F' en la misma dirección (fig. 146). Por consiguiente, el ancho de la figura G en la dirección arbitraria l, es dos veces mayor que el ancho de la figura F en esta misma dirección.

Pero el ancho de la figura G es en toda dirección igual a 2 (ya que G es el círculo unidad). Pues el ancho de la figura F en toda dirección es igual a 1 ya que F es (en la geometría de Minkowski que se determina por el círculo unidad G) una figura de ancho constante 1.

Sin duda, si en calidad de círculo unidad, se toma en lugar de $G=F+F'$ otra cualquier figura homotécica a $F+F'$, resulta que en tal geometría, F también será figura de ancho constante.

Por otro lado, sea F una figura de ancho constante en cierta geometría de Minkowski. En tal caso, evidentemente, F' también será figura de ancho constante y por lo tanto, lo será $F+F'$. Pero la figura $F+F'$ es centrosimétrica y como es fácil ver que una figura centrosimétrica convexa tiene ancho constante sólo en el caso si ella es un círculo en la geometría de Minkowski a considerar.

De tal forma, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema. *F será figura de ancho constante en el plano de Minkowski con círculo unidad G cuando y sólo cuando la suma $F+F'$ de la figura F con la figura centrosimétrica F' es, en dicha geometría, un círculo.*

De este teorema se desprende que toda figura convexa F es figura de ancho constante en la geometría de Minkowski con círculo unidad k $(F+F')$ y sólo en dicha geometría (k es un número positivo arbitrario).

([14]) (pág. 65). Sea F una figura convexa acotada y G, cierta parte de ella (es decir, un subconjunto cerrado). Examinemos toda clase de figuras, homotécicas a F con coeficiente de homotecia que no es mayor que la unidad y que contienen la figura G. El término inferior exacto de todos los coeficientes de homotecia para tales figuras homotécicas lo designemos por k_0. Si $k_0=1$, el tamaño de la parte G es igual a 1 (ya que no existe la figura homotécica a F con coeficiente de homotecia menor que la unidad y que contiene la figura G). Sea $k_0<1$. Entoncea podemos elegir una sucesión F_1, F_2, ..., F_Q, ... de figuras homotécicas a F con centros de homotecia respectivamente O_1, O_2, ..., O_Q... y coeficientes de homotecia k_1, k_2, ..., k_Q, ..., de manera que cada una de estas figuras contenga G y sea válida la igualdad $\lim k_Q = k_0$. Con esto podemos considerar que se satisfacen la desigualdades $1>k_1>k_2>\ldots>k_Q>\ldots>k_0$.

Es fácil comprender que todos los puntos O_1, O_2, ... , O_Q, ... están situados a una distancia de la figura F, que no es mayor que $\frac{d}{1-k_1}$ (donde d es el diámotro de dicha figura). En realidad, supongamos que el punto O_Q está a una distancia de F mayor que $\frac{d}{1-k_1}$. Entonces pare el punto arbitrario A de la figura F tenemos $O_QA>$

$> \frac{d}{1-k_1}$. En el caso de la homotecia con centro O_q y coeficiente k_q, el punto A pasa a tal punto A' con el que $O_qA' = k_q \cdot O_qA$. Por lo tanto, tenemos que $(AA' = (1-k_q) \cdot O_qA > (1-k_1) \cdot O_qA > d$. De ese modo, cada punto A de la figura F se desplaza con esta homotecia a una distancia mayor que d, o sea, pasa al punto A' *que no pertenece* a la figura F. En otras palabras, la figura F_q en la que se convierte la figura F para la homotecia a considerar, no tiene puntos comunes con F. Pero esto contradice a que la figura F_q contiene la parte G de la figura F.

Así, todos los puntos O_1, O_2, ..., O_q, ... están situados a una distancia finita de la figura F. Por esta razón, la sucesión O_1, O_2, ..., O_q, ... tiene, por lo menos, un punto límite. Sin limitar la comunidad, se puede considerar (pasando si es necesario a una subsucesión) que la sucesión O_1, O_2, ..., O_q, ... tiene *sólo un* punto límite O_0, es decir, existe *el límite* $\lim\limits_{q \to \infty} O_q = O_0$.

Es fácil comprender que la figura F_0 homotécica a F con centro de homotecia en O_0 y coeficiente k_0 contiene la figura G (ya que $\lim\limits_{q \to \infty} k_q = k_0$, $\lim\limits_{q \to \infty} O_q = O_0$). Por lo tanto, existe una figura F_0 homotécica a F con coeficiente k_0 que contiene G pero ninguna figura homotécica a F con coeficiente menor que k_0 no puede contener por completo G (según la definición del término exacto inferior). Esto significa que k_0 es el tamaño de la parte G. De esta manera hemos establecido que la noción del tamaño tiene sentido para cualquier parte G de la figura F.

([15]) (pág. 88). El problema de iluminación resulta ser mucho más interesante y complicado para los cuerpos espaciales y para cuerpos en un espacio n-dimensional. Señalemos solamente que para los cuerpos convexos, tridimensionales y acotados (e incluso para los polígonos tridimensionales), no se sabe hasta la fecha si es siempre válida la desigualdad $c(F) \leqslant 8$.

([16]) (pág. 97). Los problemas del recubrimiento e iluminación de figuras no acotadas resultan ser particularmente interesantes en el espacio tridimensional y multidimensional. Como demostró P.S. Soltan, el teorema 10 es válido para figuras con todo número de dimensiones. En particular, fue totalmente solucionado por él el problema del recubrimiento de cuerpos no acotados tridimensionales con cuerpos homotécicos menores. Precisamente, en este caso $b(F)$ puede tomar solamente valores iguales a 1, 2, 3, 4, ∞.

A nuestros lectores:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial "Mir", 1 Rizhski per, 2, 129820 Moscú, I-110, GSP, URSS.