

Círculos Matemáticos Guatemala

Exploración Interactiva “Danza de Grupos”

Tallerista: Juan Carlos Molina.

Revisado Por: Javier Ronquillo.

Realizado Por: Erick Pú.

**“Exploramos la Matemática desde un punto
Interesante y Fascinante”.**

Exploración Interactiva

La Danza de Grupos (Matemáticos)

Propósito

Esta actividad tiene varias metas:

1. Introducir el concepto de modelo matemático.
2. Análisis simple de simetrías en geometría.
3. Trabajar con tablas de Cayley.
4. Introducir el concepto de grupos finitos, sub-grupos e isomorfismos.
5. Aplicaciones a pedagogía y otros campos.
6. Aspecto Histórico.

Objetivo

- Que el estudiante/docente observe que los conceptos matemáticos se pueden aprender/presentar en forma más natural y orgánica.
- Discusión de un tema clásico usando un punto de vista distinto. Esto depende de la aplicación que se use. En el caso de esta exploración, se explora el concepto de división no exacta (con residuo = matemática modular).

Descripción

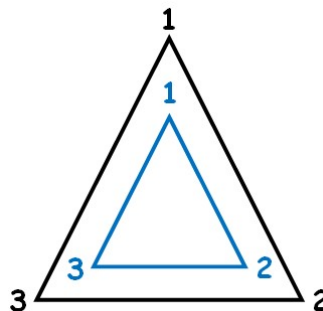
1. Se crea un baile de 3 personas.

Las Reglas: Se pueden transponer 2 de los bailarines, quedando una persona fija en su lugar (transposición) o se pueden rotar todas las personas al mismo tiempo una o más posiciones (rotación).

Música: Waka-Waka de Shakira.

2. Se crea un modelo matemático usando simetrías del triángulo.

Materiales: 2 Cartulinas Grandes - 2 Cartones. Se superponen dos triángulos equiláteros.



3. Crear una tabla de Cayley con la identidad, rotaciones e transposiciones y operaciones entre estas.
4. Aplicación Pedagógica: **División con residuos y Matemática Modular.**

De Interés:

- a. Crear una tabla con todos los residuos al dividir por 3.
- b. Comparar la tabla con la tabla del subgrupo de simetrías del triángulo que incluye sólo las rotaciones.
- c. Crear una tabla para los residuos módulo 12 (el reloj análogo).

Preguntas

1. ¿Se pueden generar todas las rotaciones con una sola?
2. ¿Qué de las transposiciones?
3. ¿Cómo se miraría la tabla de Cayley al usar los generadores?
4. ¿Es esta tabla conmutativa?
5. ¿Por qué no se usan rotaciones en dirección opuesta?
6. ¿Cómo se puede describir el grupo sin usar la tabla de Cayley?
7. ¿Es conmutativo el subgrupo de rotaciones?
8. ¿Importa si se designa la operación como $+$ o $*$?
9. ¿Son todos los intercambios necesarios?
10. ¿Cuáles son los residuos cuando sumamos por 10?

Un poco de conocimiento....

De un Modelo Matemático

Es un sistema donde todos los comportamientos u opciones se pueden simular por medio de ecuaciones matemáticas cuyas variables están previamente establecidas de acuerdo a lo que se quiere contemplar. Te permiten obtener resultados en base a experiencias anteriores o a estadística. Hay que rescatar que todo modelo matemático sufre de error cuando se compara con la realidad, pues siempre será un cálculo y factores externos que no permitan la exactitud.

(Círculos Matemáticos)

“Es tratar de expresar los patrones evidentes en un fenómeno usando herramientas matemáticas como operaciones o estructuras algebraicas”.

(Javier Ronquillo)

De Cayley y sus Tablas

La tabla de Cayley de un grupo finito es una tabla que describe cómo es la operación de dicho grupo. Presenta una estructura muy similar a la famosa tabla pitagórica. Fueron introducidas por Arthur Cayley en un artículo de 1854 («On The Theory of Groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$ »), en el que describe cualquier grupo en término de permutaciones.

Estructura de la Tabla

Dado el grupo finito $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, su tabla de Cayley tendrá n filas y n columnas. En la fila i , columna j , aparece el resultado de la operación $g_i * g_j$ (donde $*$ es la operación del grupo).

Ejemplos

Tomamos $G = \{0, 1, 2\}$ con la operación suma módulo 3. Entonces su tabla de Cayley es:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

El grupo simétrico S_3 tiene los siguientes elementos:

$$\text{Id: } G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad G_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La tabla de Cayley para $(S_3, \circ)$ es:

$\circ$	id	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
id	id	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_2	g_2	g_1	g_5	g_6	g_3	g_4
g_3	g_3	g_6	g_1	g_5	g_4	g_2
g_4	g_4	g_5	g_6	g_1	g_2	g_3
g_5	g_5	g_4	g_2	g_3	g_6	g_1
g_6	g_6	g_3	g_4	g_2	g_1	g_5

Propiedades Básicas

Un grupo es abeliano si y solo si su tabla de Cayley es simétrica. En la tabla de Cayley, cada elemento del grupo aparece una y solo una vez en cada fila y cada columna. O sea que cada fila y columna es una permutación de los elementos del grupo.

(Wikipedia)

Aspecto Histórico

1. Evariste Galois (1811 – 1832)
2. Claude Levi-Strauss (nacido 1908) y André Weil (1906 – 1998)

Bibliografía

1. Livio, Mario – The Equation That Could not Be Solved.