

**Lecciones populares
de matemáticas**

SISTEMAS DE NUMERACION

S. V. Fomín

	0	1
0	0	0
1	0	1

Editorial MIR



Moscú



ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

С. В. ФОМИН

СИСТЕМА
СЧИСЛЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

S. V. FOMÍN

SISTEMAS
DE NUMERACIÓN

Traducido del ruso por Carlos Vega,
Candidato a Doctor en ciencias
físico-matemáticas

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

IMPRESO EN LA URSS

1975

© Traducción al español. Mir. Editorial 1975

На испанском языке

ÍNDICE

Prefacio 6

- § 1. Sobre los números redondos
y no redondos 7
- § 2. Orígenes del sistema decimal
de numeración 9
- § 3. Otros sistemas de numeración
y sus orígenes 10
 - § 4. Sistemas posicionales
y no posicionales 13
 - § 5. Operaciones aritméticas
en distintos sistemas de numeración 14
 - § 6. Conversión de los números
de un sistema a otro 16
 - § 7. Sobre los criterios
de divisibilidad 20
 - § 8. Sistema binario 23
 - § 9. El «nim», juego
de los tres montones 26
- § 10. Código binario en la telegrafía 29
 - § 11. El sistema binario guardián
de secretos 30
 - § 12. Unas palabras sobre
las computadoras 33
 - § 13. Por qué «prefiere»
la máquina electrónica
el sistema binario de numeración 34
 - § 14. Sobre una propiedad notable
del sistema ternario 37
 - § 15. Sobre fracciones infinitas 40

PREFACIO

El lenguaje de los números, igual que el corriente, tiene su alfabeto. En el lenguaje de los números que hoy día se utiliza prácticamente en todo el globo terráqueo, se emplean como alfabeto las 10 cifras del 0 al 9. Este lenguaje se llama sistema decimal de numeración. Pero no siempre y no en todos los lugares las personas usaron el sistema decimal. Este sistema no tiene, desde el punto de vista matemático, ventajas especiales sobre otros posibles sistemas de numeración y su difusión universal no se debe, de modo alguno, a las leyes generales de las Matemáticas, sino a razones totalmente de otra índole.

Últimamente oponen una seria competencia al sistema decimal los sistemas binario y, en parte, ternario que son los que «prefieren utilizar» las modernas computadoras.

En este libro se relatan las propiedades, la historia de la aparición y las aplicaciones de los distintos sistemas de numeración. Su lectura no exige conocimientos matemáticos superiores al programa escolar.

§ 1
SOBRE LOS NÚMEROS REDONDOS
Y NO REDONDOS

«Del portal salió un hombre de unos 49 años que después de andar por la calle unos 196 metros entró en una tienda, compró dos septenas de huevos y continuó su camino...» ¿Verdad que esta descripción parece un tanto extraña? Cuando estimamos aproximadamente cierta magnitud —la edad de una persona, una distancia, etc.— siempre recurrimos a números redondos y, como regla, decimos «unos 200 metros», «una persona de unos 50 años», etc. Es más fácil memorizar los números redondos que los demás; es más simple operar y realizar las operaciones matemáticas con ellos. Por ejemplo, para nadie resulta difícil multiplicar mentalmente 100 por 200; pero si se trata de multiplicar dos números no redondos de tres dígitos, digamos 147 y 343, eso no está al alcance de cualquiera sin recurrir al lápiz y al papel.

Al hablar de los números redondos, no nos damos cuenta, en general, que la división de los números en redondos y no redondos es convencional por su esencia y que un mismo número resulta redondo o no según el sistema de representación de los números o, como suele decirse, según el sistema de numeración que empleamos. Para analizar esta cuestión veamos, ante todo, que representa en sí el habitual sistema decimal de numeración que usamos. En este sistema todo número entero positivo se representa como la suma de unidades, decenas, centenas, etc., o sea, como la suma de diferentes potencias del número 10 con coeficientes cuyo valor va del 0 al 9 inclusive. Por ejemplo, la denotación {

2548

significa que el número considerado contiene 8 unidades, 4 decenas, 5 centenas y 2 millares, o sea, 2548 es la abrevia-

tura de la expresión

$$2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8 \cdot 10^0.$$

Sin embargo, con no menos éxito podríamos representar todo número como combinación de potencias de otro número entero cualquiera (a excepción del 1) que no sea el número 10; por ejemplo, el número 7. En este sistema, llamado sistema septenario de numeración o sistema de numeración de base 7, contaríamos desde el 0 hasta el 6 corrientemente, pero consideraríamos el número 7 como unidad del orden de unidades siguiente. Es natural representarlo en nuestro nuevo sistema septenario por el símbolo

10

(unidad del segundo orden). Para no confundir esta denotación y el número decimal 10, le agregaremos el subíndice 7, o sea, en lugar del 7 escribiremos definitivamente

$(10)_7$.

Las unidades de los ordenes sucesivos son los números 7^2 , 7^3 , etc. Lo natural es representarlas así

$(100)_7$, $(1000)_7$, etc.

Todo número entero puede ser obtenido como combinación de las potencias del número 7, es decir, puede ser representado en la forma

$$a_k \cdot 7^k + a_{k-1} \cdot 7^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 7 + a_0,$$

donde cada uno de los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_k$ puede tomar cualquier valor desde el 0 hasta el 6. Igual que en el caso del sistema decimal, lo natural para representar los números en el sistema de base 7 es omitir sus potencias escribiendo el número en la forma

$(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_7$,

empleando de nuevo el subíndice 7 para subrayar que en el sistema de numeración utilizado se ha tomado por base precisamente el número 7.

Veamos un ejemplo. El número decimal 2548 puede ser representado en la forma

$$1 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 0,$$

o sea, según hemos convenido, en la forma

$$(10300)_7.$$

Por lo tanto,

$$(2548)_{10} = (10300)_7.$$

Prestemos atención a que en este sistema septenario serán redondos los números que no lo son en el sistema decimal. Por ejemplo,

$$(147)_{10} = (300)_7 \text{ y } (343)_{10} = (1000)_7,$$

(ya que $147 = 3 \cdot 7^2$ y $343 = 7^3$); al mismo tiempo tenemos

$$(100)_{10} = (202)_7 \text{ y } (500)_{10} = (1313)_7,$$

etc. Por eso, en el sistema septenario resulta más fácil multiplicar mentalmente $(147)_{10}$ por $(343)_{10}$ que $(100)_{10}$ por $(200)_{10}$. Si usásemos el sistema septenario, consideraríamos la edad de 49 años (y no de 50) una fecha redonda celebrándola como un aniversario, diríamos «unos 98 metros» o «unos 196 metros» al estimar a ojo las distancias (porque $(98)_{10} = (200)_7$ y $(196)_{10} = (400)_7$ son números redondos en el sistema septenario), contaríamos los objetos por septenas (y no por decenas), etc. En una palabra, si fuese comúnmente aceptado el sistema septenario, a nadie sorprendería la frase con la que hemos comenzado nuestra exposición.

Sin embargo, el sistema septenario no tiene la menor difusión y no puede competir de ninguna forma con el sistema decimal. ¿Por qué razón?

§ 2

ORÍGENES DEL SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN

¿Por qué desempeña un papel tan privilegiado precisamente el número 10? Una persona ajena a estas cuestiones contestaría quizá sin vacilar que se trata sencillamente de que el número 10 es redondo y resulta cómodo multiplicar por él cualquier número, así como contar por decenas, centenares, etc. Hemos visto, sin embargo, que la situación es precisamente la opuesta: el número 10 es redondo debido a que se toma por base del sistema de numeración. Si pasamos

a otro sistema de numeración, digamos septenario (en el que este número se representa como (13)), dejará inmediatamente de ser redondo.

Las razones por las cuales precisamente el sistema decimal ha sido universalmente aceptado no son, ni mucho menos, de índole matemática: los diez dedos de las manos han constituido el aparato primario de cálculo que empleó el hombre desde los tiempos prehistóricos. Valiéndose de los dedos es fácil contar hasta diez. Al llegar a diez, es decir, después de consumir todas las posibilidades de nuestro «aparato de cálculo» natural, lo lógico es considerar el número 10 como una unidad nueva, mayor (la unidad del orden siguiente). Diez decenas forman la unidad del tercer orden y así sucesivamente. Por lo tanto, precisamente el cálculo a base de los dedos de las manos ha dado origen al sistema que nos parece ahora completamente natural.

§ 3

OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN Y SUS ORÍGENES

El sistema decimal de numeración tardó mucho en ocupar la posición dominante que tiene actualmente. En distintos períodos históricos muchos pueblos emplearon sistemas de numeración diferentes del decimal.

Por ejemplo, tuvo bastante difusión el sistema duodecimal. Indudablemente su origen también está ligado al cálculo por los dedos: puesto que los cuatro dedos de la mano (a excepción del pulgar) tienen 12 falanges en total (fig. 1), pasando el dedo pulgar por estas falanges se puede contar de 1 hasta 12. Después se toma 12 como la unidad del orden siguiente, etc. Los vestigios del sistema duodecimal se han conservado en la lengua hablada hasta nuestros días: en lugar de «doce» a menudo decimos «docena». Muchos objetos (cuchillos, tenedores, platos, pañuelos, etc.) suelen contarse por docenas y no por decenas. (Recuérdese, por ejemplo, que las vajillas son, como regla general, para 12 ó 6 personas y muy rara vez para 10 ó 5.) Hoy día casi no se emplea la palabra «gruesa», que significa doce docenas (o sea, la unidad del tercer orden en el sistema duodecimal), pero hace unas

decenas de años era una palabra bastante extendida especialmente en el mundo del comercio. La docena de gruesas se llamaba «masa», aunque hoy día pocas personas conocen esta significación de la palabra «masa».

Los ingleses conservan indudables vestigios del sistema duodecimal: en el sistema de medidas (1 pie=12 pulgadas) y en el sistema monetario (1 chelín=12 peniques).

Notemos que desde el punto de vista matemático el sistema duodecimal tiene ciertas ventajas sobre el decimal



FIG. 1

porque el número 12 es divisible por 2, 3, 4 y 6 mientras que el número 10 sólo es divisible por 2 y 5; pero cuanto mayor sea la cantidad de divisores del número que constituye la base del sistema de numeración, mayores ventajas se tienen al emplearlo; volveremos a esta cuestión en el § 7 al tratar de los criterios de divisibilidad.

En la Babilonia antigua, cuya cultura (incluyendo la matemática) era bastante elevada, existía un sistema sexagesimal muy complejo. Los historiadores discrepan en cuanto a sus orígenes. Una hipótesis, por cierto no muy fidedigna, es que se produjo la fusión de dos tribus una de las cuales usaba el sistema senario y la otra el sistema decimal, surgiendo como compromiso entre los dos el sistema sexagesimal. Otra hipótesis es que los babilonios consideraban el año compuesto de 360 días lo que se relacionaba de modo natural con el número 60. Tampoco esta hipótesis puede con-

siderarse suficientemente argumentada: siendo bastante elevados los conocimientos astronómicos de los antiguos babilonios, cabe pensar que su error al estimar la duración del año era mucho menor de 5 días. A pesar de que no están aun claros los orígenes del sistema sexagesimal, está comprobada con suficiente seguridad su existencia y amplia difusión en Babilonia. Este sistema, igual que el duodecimal, se ha conservado en cierta medida hasta nuestros días (por ejemplo, en la subdivisión de la hora en 60 minutos y del minuto en 60 segundos, así como en el sistema análogo de medición de los ángulos: 1 grado=60 minutos y 1 minuto=60 segundos). Pero, en conjunto, este sistema que precisa sesenta «cifras» diferentes es bastante complicado y menos cómodo que el decimal.

Según Stanley, famoso explorador del África, varias tribus africanas empleaban el sistema quinario. Es evidente la relación de este sistema con la forma de la mano del hombre, «máquina computadora» primaria.

Los aztecas y los mayas, que durante varios siglos poblaban las regiones amplias del continente americano y que crearon una alta cultura prácticamente liquidada por los conquistadores españoles en los siglos XVI y XVII, usaban el sistema vigesimal. Este mismo sistema era empleado también por los celtas que se establecieron en el Occidente de Europa desde el segundo milenio antes de nuestra era. Algunos vestigios del sistema vigesimal de los celtas subsisten en el moderno idioma francés: por ejemplo; «ochenta» en francés es «quatre-vingt», o sea, literalmente «cuatro veces veinte». El número 20 figura también en el sistema monetario francés: el franco, unidad monetaria; consta de 20 sous.

Los cuatro sistemas de numeración mencionados (duodecimal, quinario, sexagesimal y vigesimal) que junto al sistema decimal desempeñaron un papel notable en el desarrollo de la cultura humana están ligados —menos el sexagesimal cuyos orígenes no has sido aclarados— a una u otra forma de contar por medio de los dedos de las manos (o de las manos y de los pies), es decir, son de origen «anatómico» indudable igual que el sistema decimal.

Los ejemplos que hemos dado (y que podrían ser ampliados) muestran que estos sistemas han dejado múltiples huellas hasta nuestros días en los idiomas de muchos pueblos,

en los sistemas monetarios existentes y en los sistemas de medidas. Sin embargo, para escribir los números o realizar determinados cálculos siempre empleamos el sistema decimal.

§ 4 SISTEMAS POSICIONALES Y NO POSICIONALES

Todos los sistemas señalados anteriormente se basan en el mismo principio general. Se toma un número p , base del sistema de numeración, y todo número N se representa como la combinación de potencias de aquél con coeficientes que toman valores de 0 a $p-1$, o sea, en la forma

$$a_k \cdot p^k + a_{k-1} \cdot p^{k-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0.$$

Después, este número se denota abreviadamente

$$(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_p.$$

En este caso el valor de cada cifra depende del lugar que ocupa. Por ejemplo, en el número 222 el dos figura tres veces; pero el de la extrema derecha representa dos unidades, el del medio significa dos decenas y el otro, dos centenares. (Aquí tratamos con el sistema decimal. Si fuese empleado el sistema de base p , estos tres doses significarían, respectivamente, los valores 2, $2p$ y $2p^2$.) Los sistemas de numeración que se basan en este principio se denominan *sistemas posicionales*.

Existen también sistemas *no posicionales* que se basan en otros principios. El ejemplo más conocido de tal sistema son los números romanos. En este sistema se tiene una colección determinada de símbolos principales —unidad I, cinco V, diez X, cincuenta L, cien C, etc.— y todo número se representa como una combinación de estos símbolos. Por ejemplo, el número 88 se escribe en este sistema así

LXXXIII.

En este caso el significado de cada símbolo no depende del lugar que ocupa. En la representación del número 88 la cifra X aparece tres veces y siempre vale lo mismo, diez unidades.

Aun cuando las cifras romanas siguen empleándose, por ejemplo en los relojes, en la práctica matemática no se usan. Los sistemas posicionales tienen la ventaja de que permiten escribir números grandes mediante una cantidad relativamente pequeña de símbolos. Otra ventaja, aun mayor, de los sistemas posicionales es que permiten realizar fácilmente las operaciones aritméticas con números escritos en estos sistemas. (Multiplíquese, para comparar, dos números de tres cifras escritos en el sistema romano.)

En lo que sigue nos limitaremos a los sistemas posicionales de numeración.

§ 5 OPERACIONES ARITMÉTICAS EN DISTINTOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Para los números escritos en el sistema decimal empleamos las reglas de adición y multiplicación «en columna» y de división «en ángulo». Estas mismas reglas son válidas también para los números escritos en cualquier otro sistema.

Consideremos la adición. Tanto en el sistema decimal como en otro cualquiera, sumamos primero las unidades, pasamos luego al orden siguiente, etc., hasta llegar al mayor de los órdenes, con la particularidad de que se hace un traslado al orden siguiente cada vez que en un orden se obtiene una suma mayor o igual a la base del sistema empleado. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rcl} 1) & + (23651)_8 & \\ & + (17043)_8 & \\ \hline & (42714)_8 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2) & + (423)_8 & \\ & + (1341)_8 & \\ & + (521)_8 & \\ \hline & (3125)_8 & \end{array}$$

Pasemos a la multiplicación. Para concretar, escojamos un sistema determinado, por ejemplo, el senario. La multiplicación de los números se basa en la tabla de multiplicar que ofrece el producto de los números menores que la base del sistema de numeración. Es fácil comprobar que la tabla de multiplicar del sistema senario es

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

En cada célula aparece aquí el producto de los números que corresponden a la fila y a la columna de esta célula con la particularidad de que todos los números se escriben en el sistema senario (hemos omitido el subíndice correspondiente para no complicar la tabla).

Valiéndonos de esta tabla, podemos multiplicar fácilmente «en columna» los números de tantos órdenes como se quiera. Por ejemplo,

$$\begin{array}{r}
 \times (352)_6 \\
 (245)_6 \\
 \hline
 (3124)_6 \\
 (2332)_6 \\
 (1144)_6 \\
 \hline
 (145244)_6
 \end{array}$$

La división «en ángulo» también se puede realizar en cualquier sistema de numeración. Consideremos, por ejemplo, el problema siguiente: divídase $(120101)_3$ por $(102)_3$. He aquí la solución:

$$\begin{array}{r}
 (120101)_3 \quad | \quad (102)_3 \\
 (102)_3 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad (1101)_3 \\
 (111)_3 \\
 (102)_3 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 (201)_3 \\
 (102)_3 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 (22)_3
 \end{array}$$

(Escribanse el dividiendo, el divisor, el cociente y el resto en el sistema decimal y verifíquese el resultado.)

Problema 1. En la pizarra se ha conservado una fórmula incompleta

$$\begin{array}{r}
 + \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & - & 5 & - \\ 1 & - & 6 & 4 & 2 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccc} 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}
 \end{array}$$

¿En qué sistema de numeración están escritos los sumandos y la suma?

Respuesta. En el sistema septenario.

Problema 2. Al preguntarle cuántos alumnos había en su clase un maestro respondió: «100 alumnos y de ellos 24 varones y 36 hembras». Primero la respuesta nos extrañó, pero luego comprendimos que el maestro no empleó el sistema decimal. ¿Cuál había empleado?

La solución de este problema es sencilla. Sea x la base del sistema correspondiente. Entonces las palabras del maestro significan que tiene x^2 alumnos de los cuales $2x+4$ son varones y $3x+2$ hembras. Por lo tanto,

$$2x+4+3x+2=x^2,$$

o sea,

$$x^2-5x-6=0,$$

de donde

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2},$$

es decir,

$$x_1=6 \text{ y } x_2=-1.$$

Puesto que -1 no puede ser base del sistema de numeración, resulta que $x=6$. Luego, el maestro dio su respuesta en el sistema senario: tenía 36 alumnos, de ellos 16 varones y 20 hembras.

§ 6

CONVERSIÓN DE LOS NÚMEROS DE UN SISTEMA A OTRO

¿Cómo convertir un número escrito, por ejemplo, en el sistema decimal a otro sistema distinto, digamos el septenario? Sabemos que para escribir un número A en el sistema septenario debemos representarlo en la forma

$$A = a_k \cdot 7^k + a_{k-1} \cdot 7^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 7 + a_0.$$

Es decir, para hallar la representación septenaria del número

A debemos determinar los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_h$ cada uno de los cuales puede ser una cifra de 0 a 6 inclusive. Dividamos el número A entre 7 (en números enteros). Es evidente que el resto será igual a a_0 , pues en la representación del número A todos los sumandos, a excepción del último, son divisibles por 7. Tomemos ahora el cociente que se obtiene al dividir A entre 7 y dividámoslo también por 7. El resto obtenido será igual a a_1 . Continuando este proceso, determinaremos todas las cifras $a_0, a_1, \dots, a_h$ que figuran en la representación septenaria del número A ; éstas serán los restos consecutivos que se obtienen en la división reiterada de este número por 7. Consideremos, por ejemplo, el número

$$(3287)_{10}.$$

Dividiéndolo entre 7, encontraremos el cociente 469 y el resto 4. Por consiguiente, la última cifra en la representación septenaria del número 3287 es igual a 4. Para hallar la segunda cifra dividamos el cociente encontrado 469 entre 7. Obtendremos el cociente 67 y el resto 0. Es decir, la segunda cifra de la representación septenaria del número 3287 es igual a 0. Dividiendo ahora 67 por 7, obtenemos el cociente 9 y el resto 4. Este resto 4 es la tercera cifra en la representación septenaria del número 3287. Finalmente, dividiendo el último cociente 9 entre 7, obtenemos el resto 2 y el cociente 1. Este resto 2 es la cuarta cifra de la representación buscada y el cociente 1 (que no se puede dividir ya entre 7) es la quinta (y última) cifra. Por lo tanto,

$$(3287)_{10} = (12404)_7.$$

El segundo miembro de esta igualdad es la abreviatura de

$$1 \cdot 7^4 + 2 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 4$$

al igual que 3287 es la abreviatura de

$$3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7.$$

Los cálculos realizados para pasar de la representación decimal del número 3287 a su representación septenaria pueden resumirse cómodamente así:

$$\begin{array}{r} 3287 \overline{) 7} \\ 4 \quad 469 \overline{) 7} \\ \quad 0 \quad 67 \overline{) 7} \\ \qquad 4 \quad 9 \overline{) 7} \\ \qquad \qquad 2 \quad 1 \end{array}$$

Queda claro que todo lo expuesto es válido tanto para el sistema septenario como para otro cualquiera. Podemos enunciar la regla general que permite escribir un número A en el sistema de numeración de base p : dividimos en números enteros el número A por p ; el resto obtenido es el número de unidades de primer orden en la representación p -aria del número A ; dividiendo de nuevo entre p el cociente obtenido en la primera división, tomemos el segundo resto; éste será el número de unidades de segundo orden; etc. El proceso continúa hasta obtener un cociente menor que la base de numeración p . Este cociente es el número de unidades del orden superior.

Consideremos otro ejemplo; escribasc el número 100 en el sistema binario. Tenemos

$$\begin{array}{r}
 100 \mid 2 \\
 0 \quad 50 \mid 2 \\
 \quad 0 \quad 25 \mid 2 \\
 \qquad 1 \quad 12 \mid 2 \\
 \qquad \quad 0 \quad 6 \mid 2 \\
 \qquad \qquad 0 \quad 3 \mid 2 \\
 \qquad \qquad \quad 1 \quad 1
 \end{array}$$

o sea,

$$(100)_{10} = (1100100)_2.$$

La conversión de los números escritos en el sistema decimal al sistema binario es elemento constante al operar con las computadoras de las cuales trataremos más adelante.

En los ejemplos considerados el sistema primario era el decimal. Los mismos procedimientos permiten convertir un número escrito en un sistema cualquiera a otro. Para ello habrá que realizar la misma serie de divisiones consecutivas que en los ejemplos citados, pero estas operaciones habrán de realizarse no en el sistema decimal sino en el sistema empleado para la representación primaria del número.

Problema. Supongamos que tenemos una balanza (de dos platillos) y pesas de 1 gramo, 3 gramos, 9 gramos, 27 gramos, etc. (una pesa de cada tipo). ¿Permite este juego de pesas determinar el peso de un cuerpo cualquiera con precisión de hasta un gramo?

La respuesta es positiva. Veamos la solución de este problema basada en la representación ternaria de los números.

Supongamos que el cuerpo pesa A gramos (consideramos que el número A es entero). Este número A puede ser representado en el sistema ternario

$$A = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_3,$$

o sea,

$$A = a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 3 + a_0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ toman los valores 0, 1 ó 2.

Pero podemos representar todo número en el sistema ternario de forma algo distinta empleando las cifras 0, 1 y -1 (en lugar de 0, 1 y 2). Para obtener esta representación, convertimos el número A escrito en el sistema decimal al sistema ternario empleando para ello el esquema de divisiones consecutivas ya descrito; pero cada vez que al dividir entre tres obtenemos en el resto 2, aumentaremos el cociente en una unidad y escribiremos el resto en la forma de -1 .

Así obtendremos la siguiente representación del número A

$$A = b_m \cdot 3^m + b_{m-1} \cdot 3^{m-1} + \dots + b_1 \cdot 3 + b_0,$$

donde cada coeficiente $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ puede ser igual a 0, 1 ó -1 . Por ejemplo, el número 100 (que en el sistema ternario corriente se escribe 10201) quedará representado, aplicado este procedimiento, como $11-101$, pues $100 = 3^4 + 3^3 - 3^2 + 1$.

Coloquemos ahora el cuerpo de A gramos en el primer platillo de la balanza y la pesa de 1 gramo en el segundo platillo si $b_0 = 1$ y en el primero si $b_0 = -1$ (siendo $b_0 = 0$ no usaremos la primera pesa); después, la pesa de tres gramos se coloca en el segundo platillo si $b_1 = 1$ y en el primero si $b_1 = -1$, etc. Es obvio que manejando de esta forma las pesas, lograremos equilibrar el peso A . O sea, con pesas de 1, 3, 9, etc. gramos se puede equilibrar en la balanza un peso cualquiera. Si se desconoce el peso del cuerpo, manejamos las pesas hasta lograr el equilibrio y, de este modo, determinamos el peso del cuerpo.

Para aclarar lo expuesto veamos un ejemplo. Supongamos que el cuerpo pesa 200 gramos. Convirtiendo el número 200 al sistema ternario por el procedimiento corriente, obten-

dremos

$$\begin{array}{r} 200 \mid 3 \\ 2 \quad \overline{66} \mid 3 \\ \quad 0 \quad \overline{22} \mid 3 \\ \qquad 1 \quad \overline{7} \mid 3 \\ \qquad \qquad 1 \quad \overline{2} \end{array}$$

Por lo tanto, $(200)_{10} = (21102)_3$ o en forma desarrollada

$$200 = 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2.$$

Si convertimos el número 200 al sistema ternario empleando el segundo procedimiento (o sea, usando -1 y no usando 2), tendremos

$$\begin{array}{r} 200 \mid 3 \\ -1 \quad \overline{67} \mid 3 \\ \quad 1 \quad \overline{22} \mid 3 \\ \qquad 1 \quad \overline{7} \mid 3 \\ \qquad \quad 1 \quad \overline{2} \mid 3 \\ \qquad \qquad -1 \quad \overline{1} \end{array}$$

es decir,

$$200 = 1 \cdot 3^5 - 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 - 1.$$

(la última igualdad se puede comprobar por cálculo directo).

Por consiguiente, para equilibrar el peso de 200 gramos colocado en un platillo deberemos poner en el mismo platillo las pesas de 1 gramo y de 81 gramos y en el otro platillo, las pesas de 3, 9, 27 y 243 gramos.

§ 7

SOBRE LOS CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Existen unos criterios simples que permiten determinar si un número es divisible, por ejemplo, entre 3, 5, 9, etc. Recordemos esos criterios.

1. *Criterio de divisibilidad por 3.* El número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3. Por ejemplo, el número

$$257802 \text{ (suma de cifras } 2+5+7+8+0+2=24)$$

es divisible por tres, mientras que el número

125831 (suma de cifras $1+2+5+8+3+1=20$)

no es divisible por tres.

2. *Criterio de divisibilidad por 5.* El número es divisible por 5 si su última cifra es 5 ó 0 (es decir, si el número de unidades de primer orden es divisible por 5).

3. *Criterio de divisibilidad por 2.* Es análogo al anterior: el número es divisible por 2 si el número de unidades de primer orden es divisible por 2.

4. *Criterio de divisibilidad por 9.* Es análogo al criterio de divisibilidad por 3: el número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es divisible por 9.

La demostración de estos criterios es elemental. Consideremos, por ejemplo, el criterio de divisibilidad por 3. Se basa en que las unidades de cada uno de los órdenes del sistema decimal (o sea, los números 1, 10, 100, 1000, etc.) al ser divididos entre 3 dan resto igual a 1. Por eso, todo número

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10},$$

o sea,

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

puede ser representado en la forma

$$(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) + B,$$

donde B es divisible por 3. De aquí resulta que el número

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

es divisible por 3 si, y sólo si, es divisible por 3 el número $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$.

El criterio de divisibilidad por 5 resulta de que 10 —la base del sistema de numeración— es divisible por 5 y, por ende, todos los órdenes, a excepción del de las unidades, son divisibles por 5. En lo mismo se basa el criterio de divisibilidad por 2: el número es par si termina en cifra par.

El criterio de divisibilidad por 9, igual que el criterio de divisibilidad por 3, resulta de que al dividir todo número de tipo 10^k entre 9 se obtiene el resto igual a 1.

Lo expuesto permite ver que todos estos criterios están relacionados con la representación de los números en el sistema decimal y que, en general, no son aplicables si se em-

plea otro sistema de numeración. Por ejemplo el número 86 en el sistema octonario se escribe así

$$(126)_8$$

(puesto que $86 = 8^2 + 2 \cdot 8 + 6$). La suma de las cifras es 9 pero el número 86 no es divisible por 9 ni por 3.

Sin embargo, para todo sistema de numeración se pueden enunciar criterios de divisibilidad por uno u otro número. Veamos algunos ejemplos.

Escribamos los números en el sistema duodecimal y enunciemos para este caso el criterio de divisibilidad por 6. Puesto que 12 —la base del sistema de numeración— es divisible por 6, el número escrito en este sistema será divisible por 6 si, y sólo si, su última cifra es divisible por 6 (aquí nos encontramos con la misma situación que en el caso de la divisibilidad por 5 o por 2 en el sistema decimal).

Como quiera que 2, 3 y 4 son también divisores de 12, son válidos los siguientes criterios de divisibilidad: el número escrito en el sistema duodecimal es divisible por 2 (respectivamente, por 3 y por 4) si su última cifra es divisible por 2 (respectivamente, por 3 y por 4).

Proponemos al lector demostrar las siguientes afirmaciones sobre los criterios de divisibilidad en el sistema duodecimal:

a) el número $A = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{12}$ es divisible por 8 si el número $(a_1 a_0)_{12}$ formado por sus dos últimas cifras es divisible por 8;

b) el número $A = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{12}$ es divisible por 9 si el número $(a_1 a_0)_{12}$ formado por sus dos últimas cifras es divisible por 9;

c) el número $A = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{12}$ es divisible por 11 si la suma de sus cifras, o sea, el número $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$, es divisible por 11.

Consideremos dos problemas más relacionados con la divisibilidad de los números.

1. El número

$$A = (3630)_p$$

(escrito en el sistema de base p) es divisible por 7. ¿Cuánto vale p y cuál es la representación decimal de este número si $p \leq 12$? ¿Será única la solución si no se cumple la condición $p \leq 12$?

Respuesta. $p=7$ y $A=(1344)_{10}$; si p no está acotado hay infinitas soluciones; a saber: p puede ser igual a cualquier número de tipo $7k$ ó $7k-1$, donde $k=1,2, \dots$

2. Demuéstrese que el número

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_p,$$

o sea, el número

$$(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0),$$

es divisible por $p-1$ si, y sólo si, es divisible por $p-1$ la suma

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0.$$

(Compárese con el criterio de divisibilidad por 9 en el sistema decimal y por 11 en el sistema duodecimal.)

§ 8

SISTEMA BINARIO

El número 2 es el menor de los números que se puede tomar como base de un sistema de numeración. El sistema correspondiente a esta base, llamado binario, es muy antiguo. Lo empleaban, aunque de forma muy imperfecta, algunas tribus de Australia y Polinesia. La ventaja de este sistema es su extrema sencillez. En el sistema binario intervienen sólo dos cifras 0 y 1; el número 2 representa la unidad del orden siguiente. También son muy sencillas las reglas de las operaciones con los números escritos en el sistema binario. Las reglas principales de adición se resumen así:

$$0+0=0, 0+1=1, 1+1=(10)_2,$$

y la tabla de multiplicar para el sistema binario es

	0	1
0	0	0
1	0	1

Un defecto relativo del sistema binario consiste en que incluso para escribir números no muy grandes hay que emplear muchos símbolos pues la base de este sistema es pe-

queña. Por ejemplo, el número 1000 se escribe en el sistema binario así

1111101000,

o sea, empleando diez dígitos. Sin embargo, este defecto es compensado por una serie de ventajas, razón por la cual el sistema binario se ha difundido mucho en distintas ramas de la técnica y, especialmente, en las modernas computadoras.

Más adelante trataremos de las aplicaciones técnicas del sistema binario. Ahora consideraremos dos problemas relacionados con la representación binaria de los números.

Problema 1. He pensado un número entero comprendido entre 1 y 1000. ¿Se decide usted a adivinarlo haciéndome como máximo 10 preguntas a las que sólo responderé «sí» o «no»? Decídase, no es difícil.

Una posible serie de preguntas que desde luego conduce a la solución es la siguiente:

1ª pregunta. Divida el número entre 2. ¿Da resto la división? Si la respuesta es «no» anotamos la cifra cero y si la respuesta es «sí» escribimos uno (en otras palabras, escribimos el resto de la división del número entre 2).

2ª pregunta. Divida por 2 el cociente obtenido en la primera división. ¿Da resto la división? De nuevo escribimos cero si la respuesta es «no» y uno si la respuesta es «sí».

Las demás preguntas serán del mismo tipo: «Divida entre 2 el cociente obtenido en la división anterior. ¿Da resto la división?» Todas las veces escribiremos cero si la respuesta es negativa y uno si es positiva.

Repitiendo esta pregunta 10 veces, obtendremos 10 cifras cada una igual a cero o a uno. Es fácil ver que estas cifras representan el número buscado en el sistema binario. Efectivamente, nuestras preguntas reproducen el procedimiento que se emplea para convertir un número en el sistema binario. Además, diez preguntas bastarán, pues para representar en el sistema binario cualquier número de 1 a 1000, harán falta diez cifras a lo sumo. Partiendo de que el número pensado ha sido convertido de antemano al sistema binario, queda bien evidente lo que se debe preguntar para adivinarlo: respecto a cada una de sus cifras hay que preguntar si es o no es igual a cero.

Consideremos otro problema próximo, de hecho, al anterior.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63
65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95
97	99	101	103	105	107	109	111
113	115	117	119	121	123	125	127

1

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63
66	67	70	71	74	75	78	79
82	83	86	87	90	91	94	95
98	99	102	103	106	107	110	111
114	115	118	119	122	123	126	127

2

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63
68	69	70	71	76	77	78	79
84	85	86	87	92	93	94	95
100	101	102	103	108	109	110	111
116	117	118	119	124	125	126	127

3

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63
72	73	74	75	76	77	78	79
88	89	90	91	92	93	94	95
104	105	106	107	108	109	110	111
120	121	122	123	124	125	126	127

4

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

5

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

6

64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

7

FIG. 2

Problema 2. Tengo 7 tablas cada una de 64 casillas igual que el tablero de ajedrez (fig. 2). Cada casilla tiene un número comprendido entre 1 y 127. Piense un número y dígame en que tablas (están numeradas del 1 al 7) aparece. Yo adivinaré el número. ¿De qué forma?

La cosa es sencilla.

Escribamos en el sistema binario todos los números de 1 a 127. En la representación binaria cada uno contiene 7 dígitos todo lo más (en particular, $127 = (1111111)_2$). Incluyamos el número A en la tabla de número k ($k=1, 2, \dots, 7$) si en la k -ésima posición de su representación binaria figura la unidad; si en la k -ésima posición aparece el cero, no lo incluiremos en la tabla correspondiente. Por ejemplo, el número 57 que en el sistema binario se escribe

0111001

debe ser incluido en la primera, cuarta, quinta y sexta tablas; el número 1 se incluye sólo en la primera tabla y el número 127 en todas. Por eso, al señalar en qué tablas aparece el número, usted está indicando su representación binaria. No tendré más que convertirlo al sistema decimal.

Se puede plantear a la inversa: señáleme un número cualquiera de 1 a 127 y yo le diré en qué tablas de la fig. 2 aparece y en cuáles no aparece. Para ello bastará convertir el número señalado al sistema binario (con un poco de entrenamiento se puede hacer mentalmente) e indicar los números de aquellas posiciones en las que aparece el uno¹⁾.

§ 9

EL «NIM», JUEGO DE LOS TRES MONTONES

En China se conocía antiguamente el «nim», juego de los tres montones de piedras. Consiste en que dos jugadores van tomando alternativamente piedras, a cada baza en un número cualquiera distinto al cero y de cualquier montón (pero sólo de uno). Gana el que se lleva la última piedra.

¹⁾ En estas tablas hemos escrito los números en orden de crecimiento lo que permite descifrar fácilmente su estructura. Pero se puede colocar, dentro de cada tabla, los números en un orden arbitrario y camuflar así el procedimiento empleado.

En las condiciones actuales, en lugar de piedras se emplean objetos más accesibles, por ejemplo, cerillas y este juego se conoce como «el juego de las cerillas». Está claro que la esencia del juego no cambia al sustituir las piedras por cerillas (o por otros objetos). El problema consiste en determinar el desenlace del juego si ambos jugadores aplican la táctica óptima y en explicar en qué consiste esta táctica óptima.

Para resolver este problema conviene recurrir al sistema binario. Supongamos que los tres montones tienen a , b y c cerillas, respectivamente. Representemos los números a , b y c en el sistema binario

$$\begin{aligned} a &= a_m \cdot 2^m + a_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0, \\ b &= b_m \cdot 2^m + b_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0, \\ c &= c_m \cdot 2^m + c_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \dots + c_1 \cdot 2 + c_0. \end{aligned}$$

Podemos aceptar que todos los números tienen la misma cantidad de ordenes agregando, si es necesario, por delante a los números que tienen menos dígitos que los demás la cantidad correspondiente de ceros. En este caso, cada una de las cifras $a_0, b_0, c_0, \dots, a_m, b_m, c_m$ puede ser igual a 0 ó 1, con la particularidad de que al menos una de las tres cifras a_m, b_m, c_m (pero no necesariamente todas) es distinta al cero. El jugador que realiza la primera baza puede sustituir uno de los números a, b ó c por cualquier número menor. Supongamos que ha decidido tomar las cerillas del primer montón, o sea, variar el número a . Ello significa que cambiarán algunas de las cifras $a_0, a_1, \dots, a_m$. Análogamente, al tomar las cerillas del segundo montón cambiará al menos una de las cifras $b_0, b_1, \dots, b_m$ y al tomar las cerillas del tercer montón alterará como mínimo una de las cifras $c_0, c_1, \dots, c_m$.

Consideremos ahora las sumas

$$a_m + b_m + c_m, a_{m-1} + b_{m-1} + c_{m-1}, \dots, a_0 + b_0 + c_0. \quad (*)$$

Cada una puede ser igual a 0, 1, 2 ó 3. Si al menos una es impar (o sea, es igual a 1 ó 3), el jugador que hace la primera baza puede asegurarse la victoria. Efectivamente, sea $a_h + b_h + c_h$ la primera (de izquierda a derecha) de las sumas (*) que resulta impar. Entonces, al menos una de las cifras a_h, b_h, c_h es igual a 1. Supongamos que $a_h = 1$. En este caso, el jugador puede tomar del primer montón tantas cerillas

que los coeficientes $a_m, \dots, a_{h+1}$ no se alteren, la magnitud a_h se haga igual a cero y cada uno de los coeficientes $a_{h-1}, \dots, a_0$ tome aquel valor (0 ó 1) que le convenga al jugador; o sea, del primer montón se pueden tomar tantas cerillas que todas las sumas

$$a_{h-1} + b_{h-1} + c_{h-1}, \dots, a_0 + b_0 + c_0$$

se hagan pares. En otras palabras, él que inicia el juego puede conseguir que después de su baza todas las sumas (*) resulten pares. El segundo jugador, como quiera que actúe, alterará inevitablemente la paridad de una de estas sumas por lo menos. Es decir, después de su jugada al menos una de las sumas (*) será impar. El primer jugador puede conseguir entonces que todas las sumas (*) resulten de nuevo pares. Resumiendo, después de cada baza del primer jugador todas las sumas (*) resultan pares, mientras que después de cada baza del segundo una de estas sumas por lo menos resulta impar. Puesto que el número total de cerillas va disminuyendo, más temprano o más tarde se dará la situación en que todas las sumas (*) serán igual a cero, o sea, no quedarán cerillas. Pero como todas las sumas (*) serán entonces pares, esta situación se dará después de una baza del primer jugador, es decir, el primer jugador gana. En cambio, si en el momento inicial todas las sumas (*) son pares, cualquiera que sea la baza del primer jugador, al menos una de las sumas (*) se hará impar. El segundo jugador podrá aplicar la táctica descrita para el primer jugador y de esta forma ganar la partida.

Por lo tanto, el desenlace del juego está predeterminado por los valores de los números a , b y c . Si son tales que al menos una de las sumas (*) es impar, el primer jugador puede asegurarse la victoria. Si todas esas sumas son pares, gana el segundo jugador si emplea la táctica correcta.

Es fácil darse cuenta de que las ternas de números propicias al segundo jugador aparecen raramente de modo que ganará, como regla general, el primer jugador si juega correcto y si los números a , b y c se escogen al azar. Por ejemplo, si tenemos 10 cerillas ($a+b+c=10$), existen 9 posibilidades de distribuirlas en tres montones; 8 de éstas garantizan la victoria del primer jugador y sólo una la victoria del segundo.

§ 10 CÓDIGO BINARIO EN LA TELEGRAFÍA

Una de las aplicaciones relativamente antigua del sistema binario es el código telegráfico. Escribamos en el orden alfabético las letras que se usan en el idioma castellano (incluyendo «—», o sea, el blanco entre las palabras) y numerémoslas.

—	A	B	C	Ch	D	E	F	G	H	I	J	K	L	Li	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z			
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29				

Representemos el número de cada letra en el sistema binario. Puesto que $2^5=32$, cada uno de estos números se representa con cinco cifras todo lo más. Escribiremos estos números usando cinco cifras exactamente; para ello agregaremos, si es necesario, por delante de la primera cifra la cantidad correspondiente de ceros. Tendremos así

— ~ 00000,
 A ~ 00001,
 B ~ 00010,

 Z ~ 11101.

Supongamos ahora que tenemos cinco cables uniendo dos puntos. Entonces, cada uno de los números de cinco dígitos, correspondientes a las letras del alfabeto, puede ser transmitido por esta línea mediante una combinación determinada de impulsos eléctricos: por ejemplo, conviniendo que al cero corresponde la ausencia y al uno la existencia del impulso en el cable respectivo. En el lugar de recepción, esta combinación de impulsos puede poner en funcionamiento el aparato receptor y de esta forma en la cinta quedará impresa la letra correspondiente a la combinación de impulsos (o sea, al número binario dado).

El aparato telegráfico es, en principio, la combinación de dos dispositivos: el transmisor que permite convertir las letras en el sistema correspondiente de impulsos y el receptor

que a partir de la combinación dada de impulsos imprime en la cinta (o en la tarjeta) la letra respectiva ²¹.

Es evidente que la aplicación en la telegrafía del sistema binario se debe precisamente a la facilidad de convertir el número binario en impulsos eléctricos ²¹.

§ 11

EL SISTEMA BINARIO GUARDIÁN DE SECRETOS

El telégrafo o el radiotelégrafo es un buen medio para transmitir rápidamente la información. Pero ésta puede ser interceptada con facilidad por otras personas; frecuentemente, en condiciones de guerra en particular, es preciso que ciertas informaciones sean inaccesibles para todos menos la persona a la que están destinadas. Con este fin se emplean distintos procedimientos de cifrado.

Es posible que muchos lectores se hayan entretenido en ocasiones inventando métodos de cifrado y realizando «correspondencia secreta». El método más elemental consiste en indicar cada letra del alfabeto con un símbolo: otra letra, un número, un símbolo convencional, etc. Con frecuencia estos sistemas figuran en la literatura policiaca y de aventuras; recordemos «Los monigotes danzantes» de Conan Doyle o «Viaje al centro de la tierra» de Julio Verne. Es fácil descifrar estos sistemas, pues todo idioma tiene una estructura determinada: algunas letras y combinaciones de letras aparecen con mayor frecuencia, otras con menor y algunas (digamos, n delante de b) no aparecen jamás. Esta estructura, que se conserva al sustituir las letras por símbolos, permite descifrar sin dificultad estas claves. Existen cifrados mucho más complejos pero tampoco estos resisten a cifradores expertos.

²¹ Hablamos de cinco cables que unen dos puntos. En la práctica basta con uno y los impulsos que forman la combinación correspondiente a la letra se transmiten sucesivamente, uno tras otro.

²² Además de este sistema de representación de las letras mediante cinco ceros o unos, en la telegrafía se emplea otro sistema llamado alfabeto Morse. En principio, el alfabeto Morse también representa toda letra como combinación de dos elementos distintos (punto y guión); no analizaremos aquí en detalle este sistema.

Es natural preguntar: «¿Existe un sistema de cifrado que garantice la conservación absoluta del secreto o todo texto cifrado puede ser entendido, en principio, por un cifrador suficientemente hábil?»

No es difícil inventar un sistema, muy simple en esencia, que haga imposible la lectura del texto cifrado por una persona que no conozca la clave. Para describirlo, emplearemos

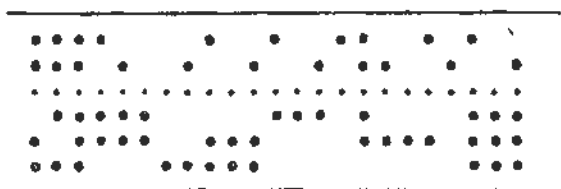


FIG. 3

el sistema binario y la representación de las letras en forma de números binarios de cinco dígitos que hemos introducido en el párrafo anterior.

El código telegráfico permite dar a todo texto la forma de una sucesión determinada de combinaciones de cinco dígitos formadas por ceros y unos. Supongamos que hemos preparado de antemano una sucesión totalmente arbitraria de combinaciones de cinco ceros y unos. Esta sucesión que se emplea para cifrar el texto se denomina gama. La gama se prepara en dos ejemplares perforando, por ejemplo, una cinta de papel (véase la fig. 3 donde cada línea vertical corresponde a una combinación determinada de cinco dígitos significando el orificio el uno y el blanco el cero). Conservemos un ejemplar de la gama y enviemos el otro al destinatario. Tomemos ahora el texto que deseamos transmitir y sumémoslo «según los órdenes» con la gama preparada. Esto significa lo siguiente: el primer número de cinco dígitos (o sea, la primera letra) del texto se suma con el primer número de la gama, el segundo número del texto con el segundo número de la gama, etc., pero con la particularidad que la adición no se efectúa según la regla corriente cuando la suma de dos unidades

arroja la unidad del orden siguiente, sino que se realiza de acuerdo con la regla

$$0+0=0, 1+0=0+1=1, 1+1=0,$$

es decir, sin pasar la suma de dos unidades al orden siguiente. Es obvio que sumando de esta forma dos números binarios, o sea, dos sucesiones de ceros y unos, obtendremos ceros si los números son iguales y obtendremos un número distinto al cero si se suma números diferentes. El resultado que se obtiene sumando de este modo el texto y la gama puede ser enviado a nuestro destinatario mediante un sistema de impulsos eléctricos por el cable telegráfico. Pero esta sucesión de impulsos captada tal y como está por el receptor quedaría impresa como una combinación de letras sin sentido. Para reconstruir el texto inicial es preciso sumar al texto cifrado la misma gama (por el mismo procedimiento de adición «según los órdenes»).

Todo el proceso puede ser resumido en el esquema siguiente:

- 1) texto + gama = texto cifrado;
- 2) texto cifrado + gama = texto + gama + gama = texto.

Se comprende que una persona en posesión de un texto cifrado de esta forma, pero no de la gama correspondiente, no puede conocer su contenido como tampoco se puede decir nada acerca de X si se conoce la suma $X+Y$, donde Y es un número arbitrario y desconocido.

El proceso descrito puede ser fácilmente automatizado colocando a la salida del transmisor un dispositivo que realiza la adición «según los órdenes» del texto y de la gama y un dispositivo idéntico a la entrada del receptor, con la particularidad de que los telegrafistas que operan en la línea no se darán cuenta siquiera de la existencia de estos dispositivos.

Sin duda este sistema de cifrado es muy engoroso, pues exige enviar constantemente a ambos extremos de la línea reservas de gama porque cada pedazo de esta gama se utiliza sólo una vez.

El empleo del sistema binario de numeración es cómodo en este caso ya que precisamente en él arroja cero como resultado cualquier número sumado a sí mismo «según los órdenes».

UNAS PALABRAS SOBRE
LAS COMPUTADORAS

Hemos hablado de la aplicación del sistema binario en la telegrafía, una rama relativamente vieja de la técnica (los primeros aparatos telegráficos, basados en la transmisión por cable de impulsos eléctricos, aparecieron en la década del 30 del siglo pasado). Veamos ahora una de las aplicaciones más modernas del sistema binario: en las computadoras. Pero previamente, aunque sea en líneas generales, deberemos explicar que son las llamadas computadoras electrónicas.

La historia del desarrollo de la técnica de cálculo es a la vez muy larga y muy corta. Los primeros aparatos que facilitaban y aceleraban el trabajo de cálculo aparecieron hace mucho. Por ejemplo, el ábaco se conoce desde hace más de cuatro milenios. Al mismo tiempo, las verdaderas máquinas matemáticas surgieron hace unos años con la aparición de las primeras computadoras rápidas basadas en la aplicación de la técnica radioelectrónica (lámparas primero y semiconductores después). Esta rama de la técnica alcanzó sorprendentes éxitos en plazos muy cortos. Las computadoras modernas funcionan a velocidades de cientos de miles e incluso millones de operaciones por segundo; es decir, que una de esas máquinas realiza cada segundo tantas operaciones como un experto calculador provisto de un aritmómetro, por ejemplo, en varios meses. La aparición de estas máquinas permitió resolver con éxito problemas tan complejos y extensos que habría sido inútil siquiera plantear con el procedimiento de cálculo manual. Por ejemplo, las computadoras modernas pueden resolver sistemas de varios centenares de ecuaciones de primer grado con un número igual de incógnitas. Con lápiz y papel o con un aritmómetro, un calculador no podría cumplir esta tarea ni en toda su vida.

En la literatura de divulgación, al hablar de las computadoras, se emplean frecuentemente expresiones como «máquina que resuelve ecuaciones complejas», «máquina que juega al ajedrez» o «máquina traductora de un idioma a otro». Así puede crearse la falsa impresión de que cada una de estas funciones —resolución de ecuaciones, juego a ajedrez, traducción, etc.— se realiza por una máquina especial

construida sólo con este objetivo. Pero para resolver distintos problemas tanto matemáticos (resolución de ecuaciones, elaboración de las tablas de logaritmos, etc.) como no matemáticos (por ejemplo, traducción de textos o juego al ajedrez) se pueden emplear los mismos aparatos llamados computadoras universales. Cada una de estas máquinas puede realizar, de hecho, sólo cierto número, bastante limitado, de operaciones elementales: sumar y multiplicar números, conservar los resultados obtenidos en un dispositivo especial llamado «memoria» de la máquina, comparar números escogiendo, por ejemplo, el mayor o el menor de dos o varios números, etc. Pero la solución de los problemas más variados y complejos puede reducirse a una sucesión (quizá muy larga) de estas operaciones elementales. Esta sucesión queda determinada por el programa que para cada problema concreto elabora el programador. Por lo tanto, la variedad de problemas que puede resolver la computadora universal no es otra cosa que la variedad de programas que se introduce en ella.

Por eso, la computadora universal es, en un principio, un aparato que puede realizar con extraordinaria velocidad operaciones aritméticas (adición, multiplicación, resta y división) con los números y algunas otras operaciones como comparación de números, etc. Las operaciones a realizar y su orden son determinados por el programa.

En los cálculos, tanto a mano como con la computadora, necesitamos escribir de alguna forma los números empleados, o sea, necesitamos recurrir a un sistema de numeración. Empleando el papel y el lápiz usamos, claro está, el sistema decimal al que estamos acostumbrados. Pero este sistema no sirve para la computadora electrónica que da preferencia rotunda al sistema binario. Tratemos de explicar las razones de ello.

§ 13

POR QUÉ «PREFIERE» LA MÁQUINA ELECTRÓNICA EL SISTEMA BINARIO DE NUMERACIÓN

Al calcular a mano, escribimos los números con lápiz o tinta en el papel. La máquina necesita otro modo de fijar los números con los que opera.

Para explicar la esencia de la cuestión, consideremos primero en lugar de la computadora un aparato mucho más sencillo, el contador corriente (de luz, de gas, de taxi, etc.). Cualquiera de estos contadores se compone de varias ruedas que pueden estar (cada una) en 10 posiciones correspondientes a las cifras de 0 a 9. Es evidente que un aparato de k ruedas de este tipo permite fijar 10^k números distintos desde 0 hasta 99...9. Este contador se puede emplear como una

k veces

especie de ábaco, o sea, no sólo para fijar números sino también para realizar operaciones aritméticas.

Sí quisiéramos tener un contador adaptado a un sistema de base p y no al sistema decimal, tendríamos que emplear ruedas de p distintas posiciones en lugar de 10. En particular, el aparato que permitiría fijar los números escritos en el sistema binario debería componerse de elementos con dos posibles posiciones cada uno. Por supuesto, para hacer un contador (basado en un sistema de numeración determinado) no hay necesidad de emplear obligatoriamente ruedas. En principio, se puede construir un contador empleando elementos cualesquiera siempre que tengan tantas posiciones estables como unidades contiene la base del sistema de numeración escogido.

El contador compuesto de un sistema de ruedas u otros dispositivos mecánicos sólo puede cambiar de posición con relativa lentitud. Las velocidades de decenas y centenares de miles de operaciones por segundo de las computadoras modernas han sido alcanzadas porque en estas máquinas se emplean dispositivos electrónicos y no mecánicos. Estos dispositivos no tienen prácticamente inercia y, por eso, pueden cambiar de posición en millonésimas de segundo.

Los elementos radioelectrónicos (lámparas, semiconductores) empleados en las computadoras se caracterizan por la existencia de dos posiciones estables. Por ejemplo, la lámpara electrónica puede estar «abierta» (deja pasar la corriente) o «cerrada» (la corriente no pasa). Según este mismo principio de «sí» o «no» funcionan los semiconductores que últimamente encuentran aplicación cada vez mayor en la técnica de computo. A estas propiedades de los elementos radioelectrónicos se debe esencialmente que el sistema binario haya sido el más adecuado para las computadoras.

Los datos de partida en uno u otro problema se suelen dar en el sistema decimal. Para que una máquina, basada en el sistema binario, pueda operar con estos datos es preciso traducirlos al idioma del código binario «comprensible» para el dispositivo aritmético de la máquina. Esta traducción, claro está, puede ser fácilmente automatizada. Por otra parte, es deseable que los resultados obtenidos por la máquina sean nuevamente escritos en el sistema decimal. Por eso, en la computadora se suele prever la conversión automática al sistema decimal de los resultados obtenidos.

Como una forma intermedia se emplea con frecuencia en las computadoras el sistema binario-decimal mixto. Consiste en que el número se escribe primero en el sistema decimal y después cada una de sus cifras se representa en el sistema binario mediante ceros y unos. Por lo tanto, en el sistema binario-decimal todo número se representa mediante varios grupos compuestos por ceros y unos. Por ejemplo, el número

2593

en el sistema binario-decimal se escribe así

0010 0101 1001 0011.

A título de comparación daremos la representación binaria de este mismo número

10100010001.

Veamos cómo se realizan las operaciones aritméticas en la computadora basada en el sistema binario de numeración. La operación principal que debemos examinar es la adición, pues la multiplicación consiste en la adición reiterada, la resta en la adición de números negativos y, finalmente, la división en la resta reiterada. A su vez, la adición de números de varios órdenes consiste en realizar la adición en cada orden.

La adición de dos números binarios en cada orden puede ser descrita así ¹⁾. Sea a la cifra que figura en el orden dado del primer sumando, sea b la cifra de este mismo orden en el segundo sumando y sea c la cifra que debe ser trasladada del orden anterior (donde ha sido ya realizada la adición).

¹⁾ Aquí se trata de la adición «aritmética» corriente y no de la adición «según el orden» mencionada en el § 11 en relación con el cifrado de un texto, aunque la adición «según el orden» también desempeña su papel importante en el funcionamiento de la computadora.

Sumar en el orden indicado significa determinar qué cifra debe ser escrita en este orden y qué cifra debe ser trasladada al orden siguiente. Indiquemos por s la cifra que debe ser escrita en el orden considerado y por t la cifra que debe ser trasladada al orden siguiente. Como quiera que cada una de las magnitudes a , b , c , s y t sólo puede tomar los valores 0 ó 1, todas las variantes se pueden resumir en la tabla siguiente

a	0	1	0	0	1	1	0	1
b	0	0	1	0	1	0	1	1
c	0	0	0	1	0	1	1	1
s	0	1	1	1	0	0	0	1
t	0	0	0	0	1	1	1	1

Por lo tanto, para que la computadora pueda sumar dos números escritos en el sistema binario, hay que prever en ella para todo orden un dispositivo de tres entradas —correspondientes a las magnitudes a , b y c — y de dos salidas, correspondientes a las magnitudes s y t . Aceptemos, cómo suele ocurrir en los aparatos electrónicos, que el uno significa la existencia de la corriente en una entrada o en una salida y que el cero significa su ausencia. El dispositivo considerado, denominado *sumador de un orden*, debe funcionar de acuerdo con la tabla indicada más arriba, o sea, de forma que si no hay corriente en ninguna de sus tres entradas, tampoco debe haberla en sus salidas; si hay corriente en a pero no la hay en b y c , debe haber corriente en s y no haberla en t ; etc. Es fácil, aprovechando lámparas o semiconductores, construir un dispositivo que funcione según este esquema.

§ 14

SOBRE UNA PROPIEDAD NOTABLE DEL SISTEMA TERNARIO

Para determinar la validez de uno u otro sistema de numeración en tanto que base para la construcción de una computadora, importa, además de la sencillez de ejecución de las operaciones aritméticas en este sistema, lo que suele denomi-

narse capacidad del sistema, entendiéndose por tal el conjunto de números que en este sistema puede ser escrito con una cantidad determinada de dígitos.

Expliquemos esto con un ejemplo. Para escribir en el sistema decimal 1000 números (de 0 a 999) se necesitan 30 dígitos (10 para cada orden). En cambio, en el sistema binario con 30 dígitos se pueden escribir 2^{30} números (para cada orden binario hacen falta sólo dos cifras 0 ó 1 y, por eso, 30 dígitos permiten escribir números que contienen hasta 15 órdenes binarios). Pero

$$2^{15} > 1000,$$

o sea, teniendo 15 órdenes binarios podemos escribir más números que teniendo tres órdenes decimales. Por lo tanto, el sistema binario tiene mayor capacidad que el decimal.

Pero, ¿cuál es el sistema de numeración de mayor capacidad? Para responder, analicemos el siguiente problema concreto. Supongamos que tenemos 60 dígitos. Podemos dividirlos en 30 grupos de 2 elementos y escribir en el sistema binario cualquier número de no más de 30 órdenes binarios, o sea, 2^{30} números en total. Podemos dividir estos mismos 60 dígitos en 20 grupos de 3 elementos y escribir, empleando el sistema ternario, 3^{20} números. Luego, dividiendo los 60 signos en 15 grupos de 4 elementos y aplicando el sistema cuaternario, podemos escribir 4^{15} números, etc. En particular, empleando el sistema decimal (o sea, dividiendo todos los dígitos en 6 grupos de 10 elementos) podemos escribir 10^6 números y aplicando el sistema sexagesimal (babilonio) podemos escribir con 60 dígitos sólo 60 números. Veamos cuál de estos sistemas es el de mayor capacidad, es decir, permite escribir con estos 60 dígitos la cantidad máxima de números. En otras palabras, se trata de señalar cuál de los números

$$2^{30}, 3^{20}, 4^{15}, 5^{12}, 6^{10}, 10^6, 12^5, 15^4, 20^3, 30^2, 60$$

es el mayor. Es fácil comprobar que el número máximo es 3^{20} . En efecto, demostremos primero que

$$2^{30} < 3^{20}.$$

Puesto que $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$ y $3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$, esta desigualdad puede ser escrita en la forma

$$8^{10} < 9^{10}$$

haciéndose evidente. Además,

$$4^{15} = (2^2)^{15} = 2^{30},$$

es decir, teniendo en cuenta el resultado demostrado

$$3^{20} > 4^{15}$$

Análogamente, se comprueban con facilidad las siguientes desigualdades

$$4^{15} > 5^{12} > 6^{10} > 10^8 > 12^8 > 15^8 > 20^8 > 30^8 > 60.$$

Resulta que el sistema ternario es el de mayor capacidad. El sistema binario, así como el cuaternario que en este sentido equivale al binario, tienen menor capacidad que el ternario pero mayor que los restantes.

Esta conclusión no tiene nada que ver con que hayamos considerado 60 dígitos. Hemos tomado este ejemplo sólo porque 60 dígitos se dividen cómodamente en grupos de 2, 3, 4, etc. elementos.

En el caso general, si tomamos n dígitos y aceptamos que x es la base del sistema de numeración, obtendremos $\frac{n}{x}$ órdenes y la cantidad de números que podremos escribir será igual a

$$(x)^{\frac{n}{x}}.$$

Consideremos esta expresión como una función de la variable x que puede tomar valores positivos cualesquiera (fraccionales, irracionales) y no sólo enteros. Se puede hallar el valor de la variable x que ofrece máximo a esta función. Es igual a e^{11} , número irracional que representa la base del llamado

¹¹ Para el lector familiarizado con el cálculo diferencial daremos la demostración correspondiente. La condición necesaria para que la función $y(x)$ tenga máximo en el punto x_0 consiste en que sea igual a cero su deri-

vada en ese punto. En nuestro caso, $y(x) = (x)^{\frac{n}{x}}$. La derivada de esta función es igual a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-n}{x^2} (x)^{\frac{n}{x}} \ln x + \frac{n}{x} (x)^{\frac{n}{x}-1} = n (x)^{\frac{n}{x}-2} (1 - \ln x).$$

Igualándola a cero, obtenemos

$$\ln x = 1, \text{ o sea, } x = e.$$

Puesto que la derivada $\frac{dy}{dx}$ es positiva a la izquierda del punto $x=e$ y es negativa a la derecha, resulta por los teoremas del cálculo diferencial que en ese punto nuestra función tiene efectivamente máximo.

sistema natural de logaritmos y que desempeña un papel importante en distintas cuestiones de las Matemáticas superiores. El número e es igual aproximadamente a

$$2,718281828459045...$$

El número entero más próximo a e es 3. Es la base del sistema de numeración de mayor capacidad.

El gráfico de la función

$$y = (x)^{\frac{n}{x}}$$

puede verse en la fig. 4 (con la particularidad de que son distintas las unidades tomadas en los ejes x e y).

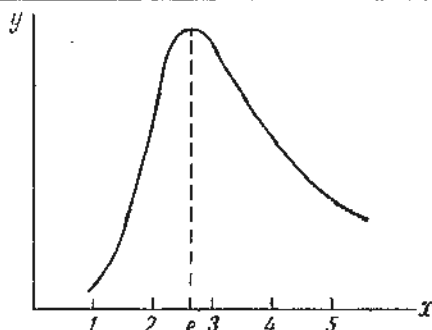


FIG. 4

La capacidad del sistema de numeración es un momento importante desde el punto de vista de su empleo en la computadora. Por eso, aun cuando la aplicación en las computadoras del sistema ternario en lugar del binario origina determinadas dificultades técnicas (deben emplearse elementos que tienen tres posiciones estables y no dos), este sistema ha sido ya empleado en algunas computadoras.

§ 15

SOBRE FRACCIONES INFINITAS

Hasta aquí hemos hablado de números enteros. De la representación decimal de los números enteros es natural pasar a las fracciones decimales. Para ello es preciso considerar,

además de las potencias no negativas del número 10 (o sea, 1, 10, 100, etc.), también las potencias negativas (10^{-1} , 10^{-2} , etc.) y formar combinaciones en las que participen tanto unas como otras. Por ejemplo, la expresión

$$23,581$$

significa como se sabe

$$2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3},$$

etc.

Es cómodo representar los diferentes números mediante puntos de la recta. Tomemos una recta y escojamos en ella



FIG. 5

un punto determinado O (origen), una dirección positiva (hacia la derecha) y una unidad, el segmento OA (fig. 5). Aceptemos que el punto O representa el cero y el punto A el uno. Construyendo a la derecha del punto O el segmento OA dos, tres, etc. veces, obtendremos los puntos que corresponden a los números dos, tres, etc. En la recta se pueden representar de esta forma todos los números enteros. Para representar los números fraccionales que contienen décimas, centésimas, etc. es preciso dividir el segmento OA en diez, cien, etc. partes y emplear estas unidades menores de longitud. Podemos de esta forma representar en la recta los puntos correspondientes a todos los números de tipo

$$a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_n,$$

o sea, a todas las fracciones decimales. Está claro que no llegaremos a agotar todos los puntos de la recta. Por ejemplo, si a partir del punto O construimos en la recta el segmento que representa la diagonal del cuadrado de lado uno, el extremo de este segmento no aparecerá entre los puntos que corresponden a las fracciones decimales por cuanto el lado del cuadrado y su diagonal son inconmesurables.

Si queremos que a cada punto de esta recta corresponda una fracción, tendremos que recurrir a las fracciones deci-

males infinitas y no sólo a las finitas. Expliquemos lo que esto significa.

Para poner en correspondencia a todo punto de la recta una fracción decimal (infinita) procederemos del modo siguiente. Para mayor comodidad hablaremos no de toda la recta sino de una parte de la misma, a saber, del segmento OA tomado como unidad de medición. Sea x un punto de este segmento. Dividamos OA en 10 partes iguales y numerémoslas de 0 a 9. Sea b_1 el número de aquel segmento parcial al que pertenece el punto x . Dividamos este segmento pequeño en 10 partes, numerémoslas de 0 a 9 e indiquemos por b_2 el número de aquel de estos segmentos pequeños al que pertenece el punto x . El segmento de número b_2 también se divide en 10 partes y repitiendo el razonamiento se obtiene b_3 . Continuemos este proceso ilimitadamente dividiendo a cada paso en 10 partes el segmento obtenido en el paso anterior. Encontraremos entonces una sucesión de números $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ que escribiremos en la forma

$$0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

llamándola fracción decimal infinita correspondiente al punto x . Tajando esta fracción en un lugar determinado, obtendremos una fracción decimal corriente (finita) $0, b_1, b_2, \dots, b_n$ que no determina exactamente la posición del punto x en la recta sino aproximadamente (a saber, con un error que no pasa de $\frac{1}{10^n}$ parte del segmento principal si la fracción infinita se corta en la n -ésima cifra).

Hemos puesto en correspondencia a todo punto de la recta una fracción decimal infinita. Es fácil ver que inevitablemente surge cierta indeterminación. Por ejemplo, dividamos el segmento OA en 10 partes y consideremos el punto fronterizo entre la primera y la segunda. Podemos aceptar que pertenece tanto a la primera parte (que lleva el número 0) como a la segunda (que lleva el número 1). En la primera variante nos encontraremos con que, continuando el proceso de división sucesiva, el punto escogido aparecerá en la parte extrema derecha (que lleva el número 9) de aquellas en que se divide el segmento obtenido en el paso anterior, es decir, logramos la fracción infinita

$$0,0999\dots,$$

mientras que en la segunda variante este punto en todas las

divisiones posteriores aparecerá en la parte que lleva el número 0 resultando la fracción

$$0,1000\dots$$

Por lo tanto, obtenemos dos fracciones infinitas correspondientes a un mismo punto. Lo mismo ocurrirá con cualquier punto frontera (de dos segmentos) de todas las divisiones. Por ejemplo, las fracciones

$$0,125000\dots \text{ y } 0,124999\dots$$

corresponden en la recta a un mismo punto.

Esta indeterminación se puede evitar conviniendo que todo punto frontera pertenecerá a uno de los segmentos que separa, ya sea al de la derecha o al de la izquierda, pero siempre al mismo. En otras palabras, podemos eliminar todas las fracciones que contienen «la cola infinita» compuesta de ceros o todas las fracciones que contienen «la cola infinita» compuesta de nueves.

Estableciendo esta limitación se puede hacer corresponder cada punto x del segmento a una fracción decimal infinita bien determinada, con la particularidad de que a dos puntos distintos corresponderán dos fracciones distintas.

No es esencial, claro está, el hecho de que para fijar la posición del punto en el segmento mediante divisiones sucesivas hayamos dividido el segmento correspondiente en 10 partes. Esto se debe sencillamente a nuestra propensión tradicional a emplear el sistema decimal. Podríamos tomar en lugar de diez otro número cualquiera, por ejemplo, dos, o sea, dividir siempre el segmento por la mitad asignando a una mitad el número 0 y a la otra, el número 1 y tomando aquella a la que pertenece el punto considerado. En este caso, todo punto correspondería a una sucesión $b_1, b_2, \dots, b_n$ compuesta sólo por ceros y unos que sería natural escribir en la forma

$$(0, b_1 b_2 \dots b_n \dots)_2$$

y denominar fracción binaria infinita. Tajando esta sucesión en un lugar cualquiera obtendríamos una fracción binaria finita

$$(0, b_1 b_2 \dots b_n)_2,$$

o sea, el número

$$b_1 \cdot \frac{1}{2} + b_2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + b_n \cdot \frac{1}{2^n}$$

que determinaría la posición del punto considerado con un error que no pasa de $\frac{1}{2^n}$ parte del segmento principal.

Las fracciones decimales infinitas —que permiten representar todos los puntos de la recta— constituyen un aparato cómodo para construir la teoría de los números reales, fundamento de muchas ramas de las Matemáticas superiores. Con no menos éxito podríamos emplear para ello en lugar

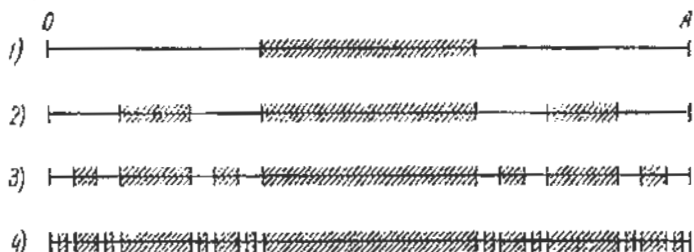


FIG. 6

de las fracciones decimales otras fracciones infinitas (por ejemplo, binarias, ternarias, etc.).

Para concluir consideremos un problema instructivo. Tomemos de nuevo el segmento OA , dividámoslo en tres partes iguales y excluyamos la parte media (aceptando que los propios puntos de división también le pertenecen y, por consiguiente, son excluidos también; fig. 6). Las dos partes que quedan también se dividen en tres partes iguales excluyéndose la parte media. Se obtienen entonces cuatro partes pequeñas y en cada una se excluye de nuevo la tercera parte media. Continuemos este proceso ilimitadamente. ¿Cuántos puntos del segmento OA quedarán?

A primera vista puede parecer que después de esta «depuración» sólo quedarán los puntos extremos O y A . Esta deducción se diría confirmada por el razonamiento siguiente. Calculemos la suma de las longitudes de los segmentos excluidos. (Recordemos que la longitud de todo el segmento OA se ha tomado igual a 1). En el primer paso excluimos un segmento de longitud $\frac{1}{3}$, en el segundo dos segmentos de longitud $\frac{1}{9}$ cada uno, en el tercero cuatro segmentos de $\frac{1}{27}$.

etc. La suma de las longitudes de todos los segmentos excluidos es igual a

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$$

Tenemos una progresión geométrica decreciente infinita con $\frac{1}{3}$ como primer término y $\frac{2}{3}$ como razón. Según la fórmula correspondiente, su suma es igual a

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Por lo tanto, la suma de las longitudes de los segmentos excluidos es igual exactamente a la longitud del segmento inicial OA .

Sin embargo, en el proceso descrito más arriba queda un conjunto infinito de puntos, sin contar ya los puntos O y A . Para comprobar esto procedamos así. Representemos todo punto del segmento inicial OA mediante una fracción infinita en el sistema ternario. Cada una de estas fracciones estará compuesta por ceros, unos y doses. Yo afirmo que en el proceso descrito más arriba de «exclusión de las partes medias» quedarán sin excluir los puntos correspondientes a las fracciones ternarias que no contienen ningún uno (o sea, constan sólo de ceros y doses). En efecto, en el primer paso se ha excluido la tercera parte media del segmento inicial, es decir, se han excluido los puntos correspondientes a las fracciones ternarias con el uno en primera posición. En la segunda etapa, de las partes restantes se ha excluido la tercera parte media, o sea, se eliminan las fracciones con el uno en segunda posición, etc. (Con la particularidad de que se excluyen también los puntos que se representan por dos fracciones ternarias, si al menos una de éstas contiene el uno. Por ejemplo, el extremo de la derecha de la primera tercera parte del segmento OA , es decir, el número $\frac{1}{3}$, se puede representar mediante la fracción ternaria

$$0,1000\dots \text{ ó } 0,0222\dots$$

y este punto se excluye.) Por lo tanto, el proceso descrito deja en el segmento OA los puntos correspondientes a las

fracciones ternarias compuestas de ceros y doses únicamente. Pero, ¡la cantidad de estas fracciones es infinita! O sea, además de los puntos extremos, en el segmento OA quedarán sin excluir infinitos puntos. Por ejemplo, quedará el punto correspondiente a la fracción

$$0,020202\dots$$

que representa la descomposición ternaria del número $\frac{1}{4}$. En efecto, la fracción ternaria infinita $0,020202\dots$ no es otra cosa que la suma de la progresión geométrica

$$2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-4} + 2 \cdot 3^{-6} + \dots;$$

según la fórmula ya mencionada, esta suma es igual a

$$\frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{4}.$$

Otra manera de comprobar que el punto $\frac{1}{4}$ no se excluye es el siguiente razonamiento geométrico intuitivo. Este punto divide todo el segmento $[0, 1]$ en razón $1 : 3$. Después de excluir el segmento $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ el punto $\frac{1}{4}$ quedará en el semi-intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ dividiéndolo en razón $3 : 1$. Después del segundo paso, este punto quedará en el intervalo $\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right)$ dividiéndolo en razón $3 : 1$, etc. En ningún paso quedará excluido el punto $\frac{1}{4}$.

Por lo tanto, resulta que el proceso descrito de «exclusión de las partes medias» conduce a un conjunto de puntos que «no ocupa sitio» en el segmento (pues la suma de las longitudes de los segmentos excluidos es igual, como hemos visto, a 1) y al mismo tiempo contiene una cantidad infinita de puntos.

Este conjunto de puntos posee también otras propiedades interesantes. Pero su estudio exigiría la exposición de nociones y resultados que rebasan el marco de este pequeño libro que damos aquí por terminado.

A nuestros lectores:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y otros idiomas. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y de la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y de ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial MIR, 1 Rizhski per., 2, GSP, Moscú I—110, 129820, URSS.

Lecciones populares de matemáticas

Este año salen a la luz
los siguientes libros de la serie
"Lecciones populares de matemáticas"

Kúrosh A.
Ecuaciones algebraicas de grados arbitrarios

Markushévich A.
Áreas y logaritmos
Números complejos y representaciones conformes
Sucesiones recurrentes

Shervátov V.
Funciones hiperbólicas

Shílov G.
**Análisis matemático en el campo
de las funciones racionales**

Sominski I.
Método de inducción matemática

Voroviev N.
Criterios de divisibilidad
Números de fibonacci

Editorial MIR



Moscú