



CÍRCULOS MATEMÁTICOS TOTONICAPÁN. EXPERIENCIA 2017

J. Ronquillo, D. Ardón, L. Mack, Némesis L

BREVE RESEÑA

No se puede negar que la matemática es una disciplina exacta, sin embargo, tiene la característica de ser muy flexible en cuanto a la forma de compartir el conocimiento a otros y una de las formas más interesantes de construir estos conocimientos es el utilizar material concreto para fijar conceptos de carácter abstracto.

Los círculos matemáticos, nacen en Rusia como una metodología de aprendizaje para personas destinadas a participar en olimpiadas matemáticas de carácter internacional, tiempo después, esta metodología llega a Estados Unidos para convertirse en una potente herramienta de construcción cognitiva.

En Agosto de 2017, en el Departamento de Totonicapán, se llevó a cabo el II Taller de Círculos Matemáticos, dirigida por Javier Ronquillo, estudiante del Doctorado en Matemática Pura de la Universidad de Ohio, Estados Unidos, junto con el apoyo de estudiantes de la misma carrera de la Universidad de San Carlos de Guatemala, la Universidad del Valle y parte del equipo de Profesores del área de Matemática de Liceo Javier Guatemala. La organización del taller estuvo a cargo de Círculos Matemáticos Totonicapán y contó con el apoyo de Grupo los 4 y la Municipalidad de Totonicapán.

En este II Taller, se abordaron temas complejos como juegos con divisores, factorización prima y una introducción a la aritmética modular, sin embargo, gracias al uso de material concreto, incluso niños de 10 años lograron descubrir teoremas, axiomas y postulados de una forma sencilla. A continuación se detallarán las actividades desarrolladas en el taller y se proporcionará un listado de material sugerido y preguntas inteligentes que favorecerán el proceso cognitivo de aprendizaje.

ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1. CHOP: Descripción del juego.

Chop es un juego que pretende lograr que el jugador sea capaz de crear sus propias estrategias de juego con tal de estar seguro de su victoria; haciendo uso de sus esquemas mentales, habilidades de pensamiento crítico y fortalecer su confianza en la toma de decisiones.

INDICADORES DE LOGRO

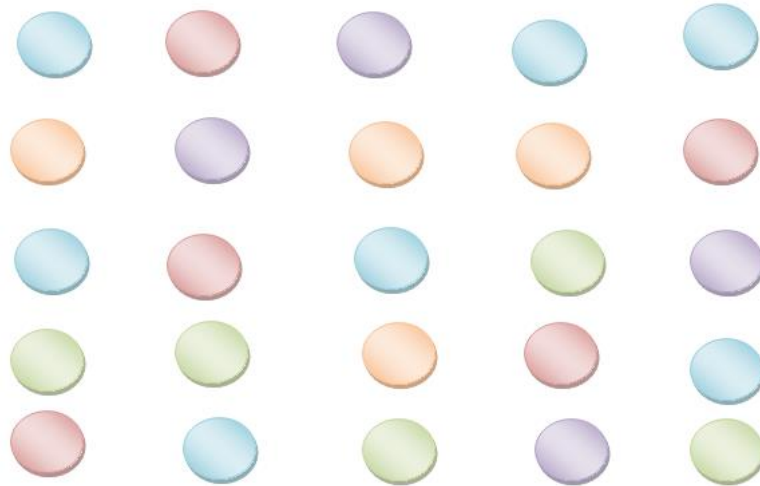
1. Aplica estrategias para la resolución de problemas matemáticos
2. Utiliza material concreto como recurso didáctico para la asimilación de conceptos y principios matemáticos.
3. Comprende el concepto de simetría y lo utiliza como estrategia para jugar Chop.

MATERIALES

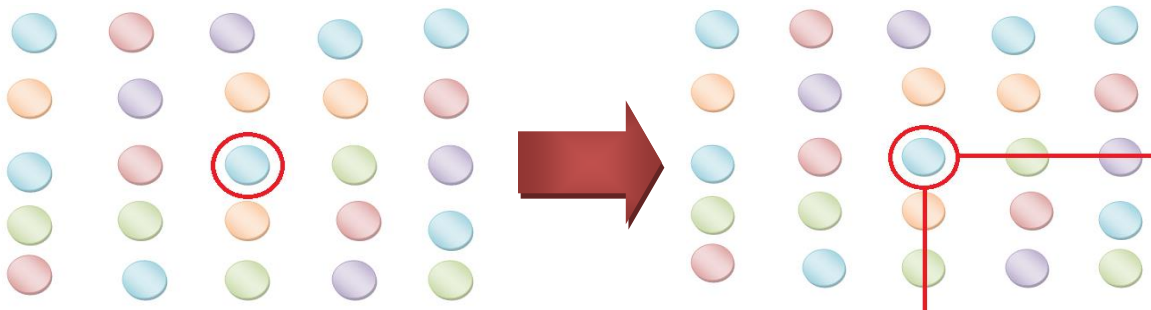
- Fichas de colores, cubitos, legos u otro material de fácil manipulación.
- Una mesa o una base para crear el tablero de juego.
- Dos jugadores por ronda.

INSTRUCCIONES

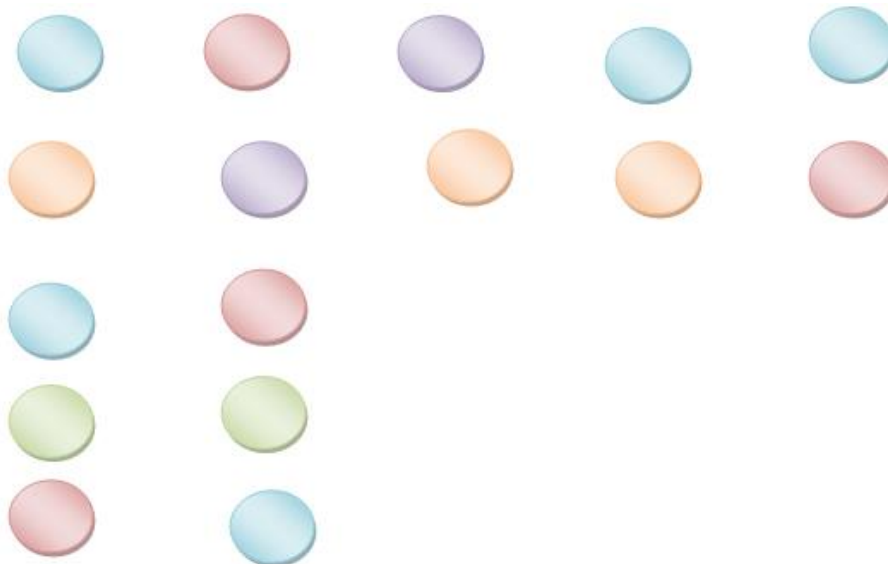
- Crear un tablero haciendo uso de $m \times n$ fichas y seleccionar una de las esquinas del tablero. Esta será nuestra esquina “tragafichas”
Los jugadores toman turnos. Durante su turno cada jugador escoge una ficha del tablero y utiliza esta ficha como vértice para formar una escuadra cuyos rayos vayan hacia los lados que forman la esquina “tragafichas” (ver ilustración). Luego el jugador remueve todas las fichas que estén sobre y dentro dicha escuadra.



Por ejemplo, para el tablero mostrado anteriormente, si se seleccionara la ficha encerrada en rojo, y se decidiera jugar hacia la esquina tragafichas, el juego procedería de la siguiente forma:



Y se procedería a quitar todas las fichas que quedan dentro de los límites de la escuadra mostrada con las líneas rojas, dejando el juego así:



- El juego sigue bajo la misma dinámica de escoger una ficha y retirar todas aquellas que queden dentro del límite de la escuadra, siempre hacia la misma esquina.
- El jugador al que le quede la última ficha, es el perdedor.

PREGUNTAS GENERADORAS DE APRENDIZAJE

1. Juega varias partidas con distintos tableros. ¿Encuentras alguna estrategia que te ayudé a ganar?
2. ¿Qué es una estrategia ganadora? ¿Puedes dar algún ejemplo de un juego en el que exista una estrategia que permita a alguno de los jugadores ganar siempre? ¿Puedes encontrar un tablero inicial en el que el primer jugador tenga una estrategia ganadora?

ESTRATEGIA 1

A veces cuando un problema es muy complejo es útil empezar por casos específicos y más simples para entenderlo mejor y ganar intuición sobre su solución. Por ejemplo, en lugar de tratar de encontrar la estrategia ganadora para cualquier tablero de $m \times n$ podemos comenzar por casos más simples como explorar si existe una estrategia ganadora para tableros de 1×1 , $1 \times n$, o 2×2 .

R. Líneas

1. Juega algunas partidas con un tablero inicial de 1×5 . ¿Encuentras alguna estrategia ganadora para alguno de los jugadores? ¿Para qué jugador la encontraste? Escribe una descripción de la estrategia que encontraste.
2. ¿Puedes describir una estrategia ganadora para un tablero inicial de $1 \times n$? ¿Qué tal para un tablero de $n \times 1$? Escribe tus respuestas.

R. Cuadrados

1. Podemos usar la estrategia de empezar por casos específicos y más simples para estudiar el caso de los cuadrados. ¿Qué ejemplos específicos de cuadrados te gustaría estudiar? ¿Cuál sería el ejemplo más simple?

ESTRATEGIA 2

A veces para resolver un problema es útil hacer varios ejemplos (como en la estrategia #1) y anotar lo que se observa en esos ejemplos. Luego se puede encontrar algún patrón en los ejemplos que se realizaron que ayude a resolver el problema inicial.

2. Juega varias partidas, con uno de los tableros cuadrados que elegiste en la pregunta anterior. ¿Encuentras alguna estrategia ganadora para alguno de los jugadores? ¿Para qué jugador la encontraste? Escribe una descripción la estrategia que encontraste.
3. ¿Puedes encontrar un patrón en la estrategia utilizada para ganar en los tableros de 3×3 , 4×4 , 5×5 ? Describe este patrón.
4. Escribe cual es la estrategia ganadora para alguno de los jugadores en un tablero de $n \times n$

R. Rectángulos

1. Utiliza la estrategia de resolución de problemas de empezar por casos específicos y más simples y encontrar patrones para tratar de encontrar estrategias ganadoras para tableros iniciales rectangulares de $m \times n$

OTRAS PEREGUNTAS:

1. ¿Qué otra variante de este juego sería interesante analizar? ¿Se podrá crear una estrategia ganadora para tableros iniciales distintos a rectángulos, como por ejemplo triángulos, pentágonos o cubos? ¿cómo variarían las reglas en estas versiones del juego?

NOTAS:

1. Está actividad fue el primer juego presentado en el taller. Se jugó alrededor de 45 minutos el primer día y se empezaron a resolver las preguntas. Sin embargo, fue un juego que se utilizó durante todo el taller como una actividad a la que se podía regresar en los descansos o después de los mismos y seguir avanzando en los casos resueltos o simplemente divertirse.

2. Algunos estudiantes tomaron la iniciativa de adentrarse con otras figuras geométricas: triángulos, pentágonos, etc. De cualquier forma el concepto de simetría sigue siendo válido y de cualquier manera, había que encontrar una estrategia ganadora.

2. DISMINUCIÓN DE FACTORES

Este juego promueve en gran manera la estrategia de jugadas anticipadas, haciendo que los jugadores incluyan dentro de su análisis las posibles jugadas del oponente, por lo tanto es un juego de estrategia que fomenta una lógica muy desarrollada.

EN EL TALLER

Esta actividad fue utilizada en el taller para discutir qué es un divisor o factor y tener un juego que obligara a usarlos. Al tener que usarlos los participantes realmente quieren entender y calcular los divisores, de otra forma no pueden jugar y más importante, no pueden ganar. También se usó para seguir buscando estrategias ganadoras.

CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Divisor o factor, número primo, estrategia ganadora, cálculo de factores.

MATERIALES

- Hojas bond.
- Lápiz
- Borrador
- Dos jugadores por partida

INSTRUCCIONES

- La disminución de factores se juega escogiendo un número "n" cualquiera, a este número se le resta alguno de sus factores (cualquier factor).
- Al número que queda se le sacan sus factores y de nuevo se le resta uno de ellos.
- El juego continúa así sucesivamente.
- Pierde el jugador al que le quede como número base el 1.

JUGADOR	NÚMERO BASE	FACTORES	PASOS A SEGUIR
1	20	1, 2, 4, 5, 10, 20	Se selecciona uno de los factores y ese factor se resta al número base para dar lugar al número de la siguiente jugada.
2	16	1, 2, 4, 8, 16	Al restarle 4 a 20 obtenemos 16, se obtienen los factores del 16 y se le resta uno de dichos factores.
1	15	1, 3, 5, 15	$16 - 1 = 15$, se obtienen sus factores y se le resta uno de ellos.
2	10	1, 2, 5, 10	Se repite el proceso.
1	8	1, 2, 4, 8	Se repite el proceso.
2	4	1, 2, 4	Se repite el proceso.
1	3	1, 3	Se repite el proceso.
2	2	1, 2	Se repite el proceso.
1	1		En esta jugada, el jugador uno es quien pierde.

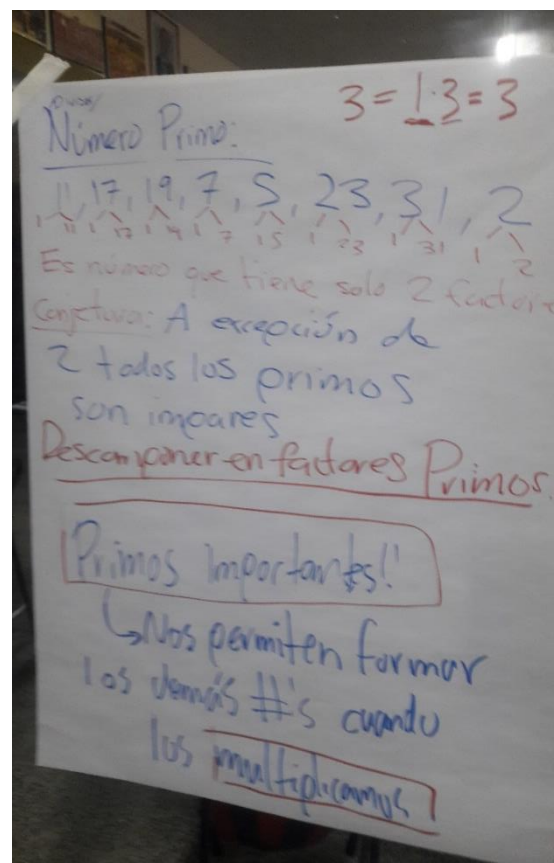
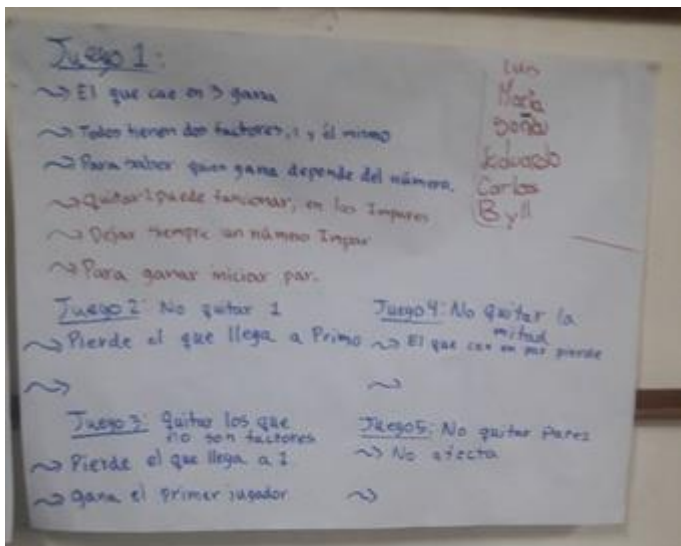
PREGUNTAS GENERADORAS DE APRENDIZAJE

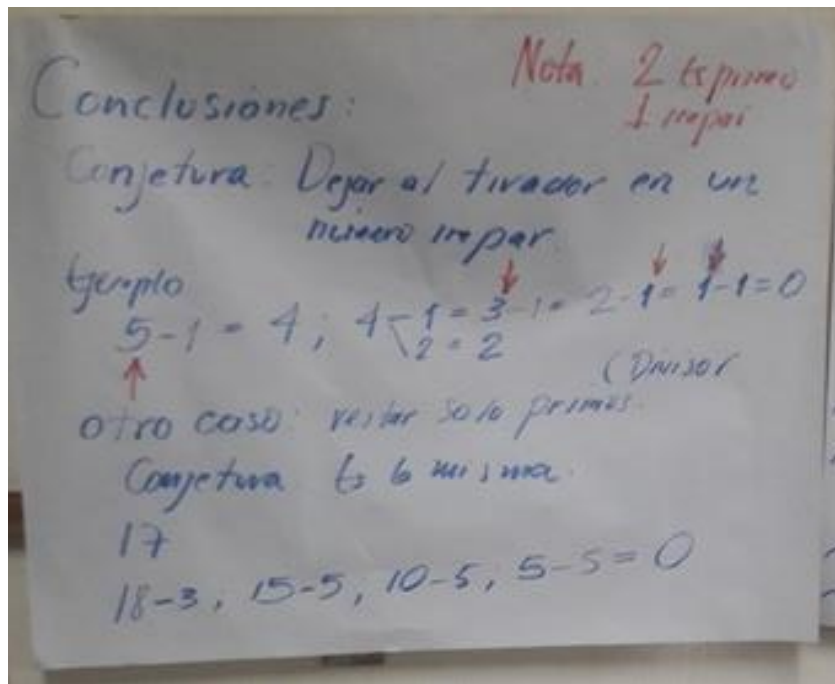
1. ¿Qué es un divisor o factor? ¿
2. Calcula los divisores de 20 y 30.
3. Juega varias partidas cuando el número inicial es 100 ¿Encuentras alguna estrategia ganadora?
4. (Recuerda la estrategia de resolución de problemas #1) ¿Puedes encontrar algún número inicial en el que sea fácil determinar la

estrategia ganadora? Si existe escribe una descripción de la estrategia.

5. ¿Qué es un número primo? ¿Existe alguna estrategia ganadora cuando el número inicial es primo? Si existe escribe una descripción de la estrategia.
6. ¿Es importante para tu estrategia ganadora que el número inicial sea mayor o menor?
7. ¿Puedes usar la solución de estos ejemplos más sencillos para resolver el problema con número inicial 100? ¿Qué tal si el número inicial es N ? Escribe una descripción de tu estrategia ganadora.
8. ¿Qué otra variante del juego crees que sería interesante de analizar? Crea tu propio juego cambiando las reglas que hemos estado utilizando
9. ¿Puedes encontrar estrategias ganadoras para estos juegos que has inventado?

IDEAS Y RESPUESTAS DE ESTUDIANTES





3. CÓDIGO NUMÉRICO

El código numérico es un juego para desarrollar la creatividad, es muy sencillo para jugar y se puede utilizar como introducción a números primos y compuestos.

INDICADORES DE LOGRO

Una parte importante de esta actividad es entender que a través de la MULTIPLICACIÓN, todos los números compuestos, pueden formarse con base al producto de dos o más números primos. Es importante hacer la distinción de que no se está trabajando con sumas. La actividad da la oportunidad de hacer la distinción.

Esto ayuda a entender varias cosas que se derivan de la factorización prima, como calcular mínimo común múltiplo, y máximo común divisor o simplificar fracciones donde hay un mismo factor en numerador y denominador.

MATERIALES

- Fichas de colores, cubitos, legos u otro material de fácil manipulación.
- Una mesa o una base para crear el tablero de juego.
- Múltiples jugadores por ronda.
- Hojas bond
- Lápices y borradores.
- Hoja con factorización prima de los números 1-100

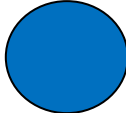
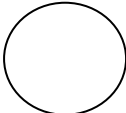
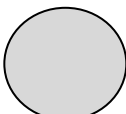
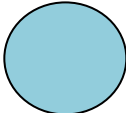
INSTRUCCIONES

- El líder del juego le asigna algún número primo a las fichas de colores diferentes, (un número primo por ficha de color)
- Luego toma 2 o más fichas, multiplica sus valores y dice el resultado de dicho producto, mostrando las fichas con los colores que formaron la cantidad. (Sin dar pistas que se trata de multiplicación y que son números primos).
- Se repite las veces que sea necesario el proceso, dando distintos números compuestos a la vez hasta que los jugadores encuentran el patrón de operación y el valor de cada ficha.
- Es muy **IMPORTANTE** mantener el secreto y el misterio para los estudiantes.

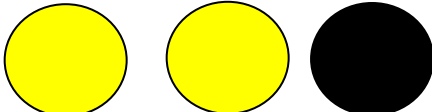
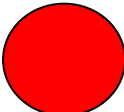
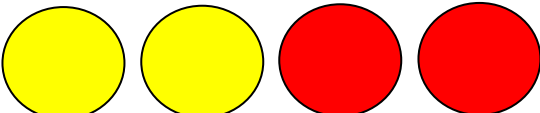
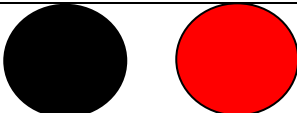

EJEMPLO

1. Se asigna un valor primo a cada ficha. (esto sólo lo sabe quien dirige el juego)

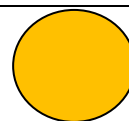
FICHA	VALOR ASIGNADO
	2
	3
	5
	7
	11

	13
	17
	19
	23

2. Se le pide a los jugadores que digan un número al azar, luego quien dirige el juego ve qué fichas forman dicho número y muestra las fichas necesarias para formar el número que solicitaron.

NÚMERO SOLICITADO	FICHAS CUYO PRODUCTO DE SUS VALORES DA COMO RESULTADO EL NÚMERO SOLICITADO POR LOS JUGADORES.
15	
5	
100	
15	
25	

7



3. Se muestran cuantos números sean necesarios (sabiendo que si dicen 1, no se podrá enseñar ninguna ficha ya que el uno no es un número primo).

PREGUNTAS GENERADORAS DE APRENDIZAJE

1. Mostrar números y repetir juego manteniendo el misterio hasta que todos los estudiantes entiendan el código. Se puede dejar que algunos estudiantes que ya lo entiendan guíen la actividad en pequeños grupos.
2. Cuando todos los participantes sepan el código se puede pedir que todos calculen algunos números o algunos códigos.
3. ¿Qué es un número primo?
4. ¿Qué es un número compuesto?
5. ¿El 1 es un número primo? Sí, no y por qué.
6. ¿Cuál es el número más pequeño que se puede formar con 4 fichas?
¿Por qué?
7. ¿Cuál es el número más pequeño que se puede formar con 4 fichas distintas? ¿Por qué?
8. ¿Puedes encontrar un múltiplo común de los números representados por: rojo, rojo, azul y amarillo, rojo, negro, sin calcular dichos números? ¿Puedes encontrar el múltiplo más pequeño o el más grande? ¿Cómo sabes que es el más pequeño o el más grande?
9. Escoge otras dos parejas de códigos de colores y explora la pregunta anterior ahora para estas parejas.
10. ¿Puedes encontrar un factor común de los números representados por: amarillo, rojo, azul y amarillo, rojo, negro, ¿sin calcular dichos números? ¿Puedes encontrar el factor más pequeño o el más grande? ¿Cómo sabes que es el más pequeño o el más grande?
11. Escoge otras dos parejas de códigos de colores y explora la pregunta anterior ahora para estas parejas.
12. ¿Qué es el mínimo común múltiplo? ¿Cómo lo podemos calcular? Utiliza o que aprendiste en la pregunta 6 y 7
13. ¿Qué es el máximo común divisor? ¿Cómo lo podemos calcular? Utiliza lo que aprendiste en las preguntas 8 y 9.

14. ¿Existen varias formas de factorizar un número haciendo uso de sus factores primos?
15. ¿Por qué el número uno no es primo?

NOTAS

Durante el taller, una vez todos los participantes entendían cómo funcionaba el código se hizo una competencia por grupos. Existían tres estaciones de la competencia. En una se pedía encontrar el código en colores para algunos números. En la otra se pedía encontrar el número a partir del código de colores. En la última se mezclaban los dos tipos de preguntas anteriores. Conforme los estudiantes iban terminando, se fueron agregando más preguntas generadoras de conocimiento, de tal forma que todos siguieron muy interesados en tratar de resolverlas y al final todos se olvidaron de la competencia original.

4. NIM

NIM es otro juego de estrategia donde se deben anticipar las posibles jugadas del oponente, el fin del juego es dejarle la última pieza al contrincante, pero siguiendo una serie de instrucciones.

MATERIALES

- Fichas de colores, cubitos, legos, frijoles, maíz u otro material de fácil manipulación.
- Una mesa o una base para crear el tablero de juego.
- Dos jugadores por ronda.
- Reglas para retirar las fichas (o material sustituto).

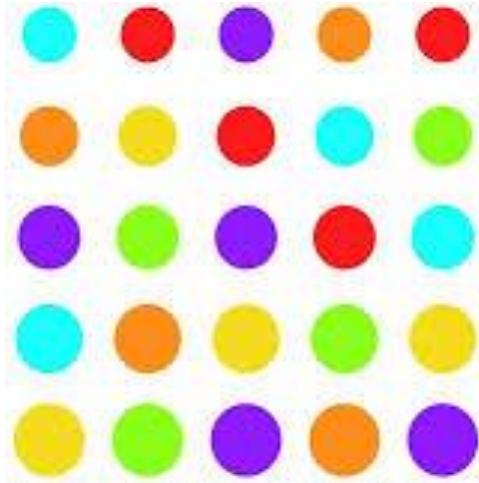
INSTRUCCIONES

- Se crea un tablero colocando varias de las piezas con las que se va a jugar esparcidas en un espacio de regular tamaño.
- Se establece la cantidad de piezas a retirar por jugada.
- Los jugadores se turnan para ejecutar sus jugadas
- Pierde el jugador al que le quede la última ficha o material del juego.

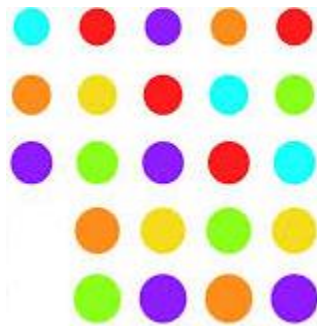
EJEMPLO

1. Definir el número de piezas posibles a retirar por jugada. Para este ejemplo se pueden retirar 1, 2 o 3 piezas a la vez.

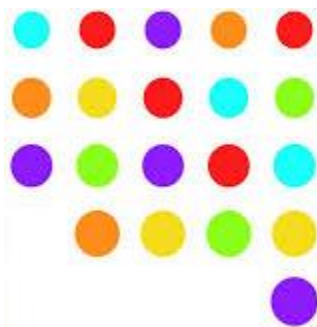
2. Crear un tablero con varias piezas esparcidas en un espacio considerable.



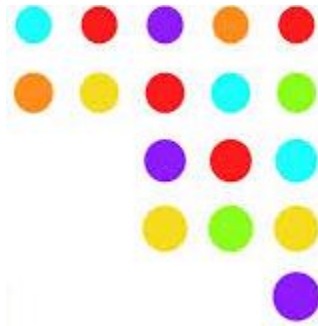
3. Por ejemplo, si el jugador 1 decide retirar dos fichas, el juego queda así:



4. El jugador 2, podría decidir retirar 3 fichas.





5. El jugador 1 puede retirar 3 también.



6. El juego podría tomar este rumbo:

JUGADOR	ESTADO DEL TABLERO DESPUÉS DE LA JUGADA
2 RETIRA 1	<p>The board state after Player 2 removes 1 dot. The top row has 5 dots (cyan, red, purple, orange, red). The second row has 4 dots (orange, yellow, red, cyan). The third row has 3 dots (purple, red, cyan). The fourth row has 3 dots (yellow, green, yellow). The fifth row has 1 dot (purple).</p>
1 RETIRA 3	<p>The board state after Player 1 removes 3 dots. The top row has 5 dots (cyan, red, purple, orange, red). The second row has 4 dots (orange, yellow, red, cyan). The third row has 3 dots (purple, red, cyan). The fourth row has 3 dots (yellow, green, yellow). The fifth row has 1 dot (purple).</p>
2 RETIRA 2	<p>The board state after Player 2 removes 2 dots. The top row has 5 dots (cyan, red, purple, orange, red). The second row has 4 dots (orange, yellow, red, cyan). The third row has 3 dots (purple, red, cyan). The fourth row has 3 dots (yellow, green, yellow). The fifth row has 1 dot (purple).</p>
1 RETIRA 2	<p>The board state after Player 1 removes 2 dots. The top row has 5 dots (cyan, red, purple, orange, red). The second row has 4 dots (orange, yellow, red, cyan). The third row has 3 dots (purple, red, cyan). The fourth row has 3 dots (yellow, green, yellow). The fifth row has 1 dot (purple).</p>
2 RETIRA 3	<p>The board state after Player 2 removes 3 dots. The top row has 5 dots (cyan, red, purple, orange, red). The second row has 4 dots (orange, yellow, red, cyan). The third row has 3 dots (purple, red, cyan). The fourth row has 3 dots (yellow, green, yellow). The fifth row has 1 dot (purple).</p>

1 RETIRA 2	
2 RETIRA 3	
1 Pierde el juego	

PREGUNTAS GENERADORAS DE APRENDIZAJE

16. ¿Cuál es la estrategia que te permita ganar en todas las partidas?
17. ¿Cómo encontrarías la estrategia ganadora para partidas cuyas opciones de retirar fichas cambie en cada jugada?
18. ¿Se podrá jugar con más jugadores y aún así estar seguro de la victoria?

CONCLUSIONES

- Los círculos matemáticos son actividades que fomentan en sobremanera el trabajo en equipo.
- A pesar de haber sido creados del otro lado del mundo, esta dinámica de círculos matemáticos se puede aplicar al contexto de diferentes países, atendiendo a la necesidad de trabajar material concreto para fijar las bases de temas matemáticos simples o complejos.
- Los círculos favorecen a mantener el interés de sus participantes, a la vez que desarrollan la creatividad y la práctica de dos de los pilares de la UNESCO para la vida y la educación, el saber conocer y el saber convivir.
- La experiencia en Totonicapán, Guatemala sirve como claro ejemplo que no hay límite de edad para aprender matemática y que no necesariamente este aprendizaje será rígido de inicio a fin.
- La implementación de los círculos matemáticos dentro del salón de clases lograría grandes avances en la calidad del aprendizaje y del desarrollo cognitivo de quienes participen en ellos.

BIBLIOGRAFÍA

- Beskin, N. M. (1976). *Fracciones maravillosas*. Moscú: Editorial Mir.
- Guatemala, M. d. (2006). *EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES EN EL AULA*. GUATEMALA: Dirección de Calidad y Desarrollo Educativo (DICADE).
- GUATEMALA, M. D. (2007). *CURRÍCULO NACIONAL BASE*. Guatemala: Dirección General de Gestión de Calidad Educativa -DIGECADE.
- H. M. Schroder, M. K. (1996). *EDUCACIÓN PARA LA LIBERTAD*. Madrid: NARCEA S.A.
- Nérici, I. G. (1992). *HACIA UNA DIDÁCTICA GENERAL DINÁMICA*. Buenos Aires, Argentina: KAPELUSZ.
- Sóbol, I. M. (1983). *Método Montecarlo*. Moscú: Editorial Mir.

EDITORES

- Dennis René Ardón, Coordinador de Matemática, Liceo Javier.
- Javier Ronquillo, Director General, Círculos Matemáticos Guatemala.
- Luis E. Mack, Profesor de Olimpiadas de Ciencias, Liceo Javier.
- Némesis Berenice López Armas, Profesora de Matemática Secundaria, Liceo Javier.